TABLE DES MATIÈRES

1 Préliminaire **7**

1.1 Espaces de Sobolev 8

1.1.1 Espaces de Lebesgue L^p 8

1.1.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 9

1.1.3 Les injections de Sobolev 10

1.2 Espaces de Sobolev fractionnaires 12

1.2.1 Espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega) : 0 < s < 1$ 12

1.2.2 Injections de Sobolev fractionnaires $0 < s < 1$ 13

1.2.2.1 Injections continues 13

1.2.2.2 Injections compacts 14

1.3 Critères de convergence 14

1.4 Dérivations au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet 15

1.5 Fonctionnelles minimisantes 15

2 Points critiques et conditions de Palais-Smale **16**

2.1 Pourquoi rechercher des points critiques ? 17

2.2 La condition de Palais-Smale : 17

3 La variété de Nehari pour les opérateurs elliptiques non locaux avec fonction concave-convexe **22**

3.1 Introduction 23

3.2 Quelques résultats préliminaires 26
3.3 Le cas sous-critique : $0 < q < 1 < p < 2_s^* - 1$ 30
3.4 Le cas critique : $0 < q < 1, p = 2_s^* - 1$ 34

4 La variété de Nehari pour le P-laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s$ 40
4.1 Introduction 41
4.2 Quelques résultats préliminaires 43
4.3 Le cas sous-critique : $0 < r < 1 < q < p_s^* - 1$ 48
4.4 Le cas critique : $0 < r < 1 < q = p_s^* - 1$ 51

Abstract

In this memory, we are interested in the existence and multiplicity of weak solutions of some classes of semi-linear fractional elliptic equations subjected to homogeneous Dirichlet conditions on the bord. The method used is that of the Nehari Manifold the Fibering method.

Key words : Fractionnary problems, Nehari manifold, Existence of solutions.

Résumé

Dans cette mémoire, nous nous intéressons à l'existence et la multiplicité des solutions faibles de certaines classes d'équations elliptiques fractionnaires semi-linéaires soumises à des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord. La méthode utilisé est celui de la variété de Nehari (Nehari Manifold) et de cartes de fibrage (Fibering Method).

Mots clés : Problèmes fractionnaires, Variété de Nehari, Existence de solutions.

Introduction

Récemment, une grande attention a été accordée à l'étude des opérateurs fractionnaires et non locaux de type elliptique, voir par exemple, [11,14-16,25] pour le cas sous-critique et [8,13,17,19] pour le cas critique. Yu [25] a notamment utilisé la variété de Nehari pour établir l'existence de solutions et de multiples solutions aux problèmes elliptiques impliquant la racine carrée du laplacien. Brandle, E. Colorado et A. de Pablo [3] a étudié l'équation fractionnaire de Laplace impliquant la non-linéarité concave-convexe pour le cas sous-critique. Les auteurs dans [3] ont utilisé l'idée de l'extension s-harmonique introduite par Caffarelli et Silvestre [7], qui permet d'exprimer les opérateurs fractionnaires $(-\Delta)^s$ sous la forme d'une condition de Dirichlet-Neumann.

L'objet de notre thèse est l'application de la méthode de Nehari pour étudier l'existence de multiplicité de solutions d'une équation non linéaire elliptique fractionnaire le problème qu'on considère s'insère dans la forme de problème générale :

$$-\Delta u(x) = f(x, u)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène Pour aborder cette classe de problème, on compte, aujourd'hui, trois différentes classes d'approches. Les méthodes topologiques, les méthodes variationnelles (pour les problèmes sous forme variationnelle) et les méthodes numériques pour une approximation des solutions. Parmi les méthodes topologiques on retrouve la linéarisation (le théorème d'inversion locale, le théorème de point fixe, la méthode des sous et sur solutions. Quant aux méthodes variationnelles leur principe est de passer d'une recherche de solutions d'équation aux dérivées partielles à une recherche d'extrémums (points critiques) d'une fonctionnelle J (dite fonctionnelle d'énergie)

$$DJ(u) = 0$$

Le tout en passant par la formulation variationnelle.

Pour la recherche de ces extrémums, on a la minimisation directe si la fonctionnelle d'énergie est bornée inférieurement. on considéré une suite $\{u_n\} \subset X$ tq :

$$J(u_n) \longrightarrow \inf_X J(u)$$

(Suite minimisante) et on essaie de trouver une sous suite convergente, ce qui assurera l'existence d'une point critique de J.

Dans de nombreuses situations la fonctionnelle J est définit aux sens qu'elle, n'est minoré

n'est majoré, ce qui oblige la recherche des valeurs critiques de J sous la forme

$$c = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J(u).$$

Où $\mathcal{N}_\lambda$ est un sous ensemble de X, ce qui permis d'obtenir une suite $\{u_n\} \subset X$,

$$\begin{aligned} J(u_n) &\longrightarrow c \\ J'(u_n) &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Une telle suite est appelle suite de Palais-Smale de nivaux c pour J. L'information supplémentaire $J'(u_n) \longrightarrow 0$, alors l'obtention d'un sous-suite convergente.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Chapitre 1 :contient l'espace fonctionnel que nous avons utilisé et des résultats Préliminaires

Chapitre 2 : la condition de Plais-Smale et exemple de suite de Plais-Smale de plus définition de point critique.

Chapitre 3 : on s'intéresse d'étudier la multiplicité de solution de problème elliptique fractionnaire non linéaire avec opérateur non local avec condition de Dirichlet homogène et des fonctions concave-convexe.

Chapitre 4 : est une généralisation de le troisième chapitre, plus précisément on s'intéresse d'étudier La multiplicité de solution pour le P-Laplacien fractionnaire avec condition de Dirichlet homogène et avec des fonctions inconnue homogènes.

CHAPITRE

1

Préliminaire

1- Espaces de Sobolev.
2- Espaces de Sobolev fractionnaires.
3- Critéres de convergence.
4- Dérivations au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet.
5- Fonctionnelles minimisante.

1.1 Espaces de Sobolev

1.1.1 Espaces de Lebesgue L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Définition 1.1 *[4]Soit $p \in \mathbb{R}^N$,alors :*
Pour $1 \leq p < +\infty$ on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N ; \text{mesurable et} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^N$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = +\infty$,on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N ; \text{mesurable et } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \right\}$$

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^N$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0 \ tq \ |f(x)| \leq c.p.p \text{ sur } \Omega\}$$

Notation 1.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, On désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Théorème 1.1 *(Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et :*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \ \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Théorème 1.2 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*
$L^p(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
$L^p(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.
$L^p(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.1 *Si Ω est de mesure fini, et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ alors :*

$$L^{p_2}(\Omega) \ \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$$

En particulier

$$L^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega) \hookrightarrow L^{1}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ et soient $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$

Définition 1.2 *On définit l'espace de Sobolev classique $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) \ = \{u \in L^{p}(\Omega), \ tq \ D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega), \forall \, |\alpha| \leq m\}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ..... \partial_{x_N}^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D^{\alpha}$ les dérivées au sens de distributions, c-à-d :

$$\langle D^{\alpha}u, \varphi \rangle \ = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha}\varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme :
Pour $p \in [1, +\infty[$:

$$\|u\|_{m,p} \ = \left(\|u\|_{p}^{p} + \|D^{\alpha}u\|_{p}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = +\infty$:

$$\|u\|_{\infty} \ = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}$$

Cas particulier $(p = 2)$
$W^{m,2}(\Omega)$ (noté aussi $H^m(\Omega)$) est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} \ = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq m}^{N} \langle D^{\alpha}u, D^{\alpha}v \rangle_{L^2(\Omega)} \ .$$

On a : $\langle u, u \rangle_{H^m} = \|u\|_{H^m}^2$.

Théorème 1.3 *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*
$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.
$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$.
$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour tout $p = 2$.

Définition 1.3 *On pose $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*
$W_0^{m,p}(\Omega)$ est un sous espace de Banach de $W^{m,p}(\Omega)$,en général $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$.

Théorème 1.4 *Soit $p \in [1, +\infty[$ nous avons : $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$; c-à-d :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \quad = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

Définition 1.4 *Les entiers $j \geq 0$ étant donnés,on définit la famille des espaces $C_b^j(\mathbb{R}^N)$ par :*

$$C_b^j(\mathbb{R}^N) \quad = \{u \in C^j(\mathbb{R}^N) \left| \forall \left|\alpha\right| \leq j, \exists K_\alpha, \left\|D^{(\alpha)}u\right\| \leq K_\alpha \right.\}.$$

Les sous espaces $C_b^{j,\lambda}(\mathbb{R}^N)$,où λ est un réel strictement positif, sont constitués des fonctions de $C_b^j(\mathbb{R}^N)$ telle que,si $|\alpha| \leq j$,alors :

$$\exists C_{\alpha,\lambda}, \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad , \left\|D^{(\alpha)}u(x) - D^{(\alpha)}u(y)\right\| \leq C_{\alpha,\lambda} \left|x - y\right|^\lambda .$$

1.1.3 Les injections de Sobolev

Théorème 1.5 *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$,$N \geq 2$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne.*

1. Si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que,$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$, ce qu'on note $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$;

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ si } N = 1.$$

2. Si $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega) \ .$$

3. Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$(et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace par l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$on a les résultats suivant :

1. Si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} , \text{ ce qu'on note } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega);$$

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \text{ si } N = 1.$$

2. Si $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega) \ .$$

3. Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$(et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace par l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$on a les résultats suivant :

Théorème 1.6 *Pour $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$ nous avons :*

1) Si $N > mp$ alors pour tout q satisfait :$p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$ nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \ \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

Plus précisément dans les conditions données, il existe une constante C telle que :

$$\forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \ \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$$

2) Pour $p = 1$ nous avons :

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \ \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$$

3) Si $N = mp$ et $p > 1$, alors pour tout q satisfait $p \leq q \leq +\infty$ nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \ \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

4) Si $p > N$, alors nous avons :

$$0 < \lambda \leq 1 - \tfrac{N}{p} \implies W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

5) Si $mp > N$, alors nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \ \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$$

Plus précisément :
** Si $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$,et j satisfait $(j-1)p < N < jp$, alors :*

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p} \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

** Si $\frac{N}{p} \in \mathbb{N}$,et $m \geq j = \frac{N}{p} + 1$, alors :*

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p} \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \ , \forall \lambda < 1.$$

1.2 Espaces de Sobolev fractionnaires

1.2.1 Espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega) : 0 < s < 1$

Définition 1.5 *[14] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^{\,p}(\Omega) \text{ avec } \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy < +\infty \right\}$$

C'est un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

le terme

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

est appelé Gagliardo semi norme de u.

Théorème 1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ nous avons alors :*

- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach $1 \leq p \leq +\infty$.
- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace séparable, et de Banach pour tout $1 \leq p < +\infty$
- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.
- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$
- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour tout $p = 2$.

En particulier , $p = 2$, $W^{\,s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ La proposition qui suit permet de montrer que les espaces H^s coïncident dans le cas de $\mathbb{R}^n$ avec les espaces $W^{\,s,\,2}$ dont la définition est donnée dans la section suivante

Proposition 1.2 *Soit $s \in (0,1)$ Alors $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

$$u \in L^{\,2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy < +\infty$$

Proposition 1.3 *L'espace $W^{\,s,\,p}(\Omega)$ est de type local, c'est-à-dire que pour tout u, dans $W^{\,s,\,p}(\Omega)$. et pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ le produit φu appartient à $W^{s,p}(\Omega)$.*

Proposition 1.4 *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

1.2.2 Injections de Sobolev fractionnaires $0 < s < 1$

1.2.2.1 Injections continues

Théorème 1.8 *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Alors il existe un constant positive $C = C(n,s,p)$ tel que : pour toute fonction mesurable à support compact $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nous avons :*

$$||u||_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

avec $p_s^* = \frac{np}{n-sp}$ exposant critique fractionnaire i,e :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)$$

Corollaire 1.1 *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Alors il existe un constant positive $C = C(n,s,p)$ tel que :*

pour tout fonction mesurable à support compact $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nous avons :

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n)}, \forall q \in [p, p_s^*]$$

avec $p_s^* = \frac{np}{n-sp}$ i.e :

$$W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, p_s^*]$$

Nous notons que lorsque $sp \to n$ l'exposant critique $p_s^* \to +\infty$ donc il n'est pas des surprise dans ce cas, si $u \in W^{s,p}$ alors $u \in L^q$ pour n'importe quel q.

Théorème 1.9 *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = n$. Alors il existe un constant positive $C = C(n,s,p)$ tel que :*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n)}, \forall q \in [p, +\infty[$$

i.e

$$W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, +\infty[$$

Théorème 1.10 *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Alors il existe un constant positive $C = C(n, s, p, \Omega)$ $\forall u \in W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n)$*

$$||u||_{C^{0,n-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

i.e

$$W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

plus précisément

$$W^{\,s,\,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{0,n-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^n)$$

1.2.2.2 Injections compacts

Théorème 1.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. qui est lipschitzien Soit $s \in (0,1), p > 1, n \geq 1$, Alors nous avons :*

- Si $sp < n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < p_s^* = \frac{np}{n-sp}$
- Si $sp = n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < +\infty$
- Si $sp > n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ est compact $\forall \lambda < s - \frac{n}{p}$

1.3 Critères de convergence

Lemme 1.1 (convergence faible) ***[12]*** *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ converge p.p. vers f. Alors f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.12 (convergence dominée de Lebesgue) *Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ qui converge p.p vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et on a :*

$$\int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx$$

Lemme 1.2 (Brezis-Lieb) *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ converge p.p. vers f. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et :*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to+\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right) .$$

Lemme 1.3 *soit E un espace réflexif, alors toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.*

1.4 Dérivations au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet

Lemme 1.4 *Soit X est un espace de Banach et Ω un ouvert non vide de X .on note $X\prime$ le dual topologique de X c'est a dire l'espace des formes linéaires continues sur$X$. Nous noterons par $\langle ., . \rangle$ le produit dans la dualité entre X' et X .*

Définition 1.6 *[4]on dit qu'une fonctionnelle $J : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in \Omega$ de dérivée $g(u) \in X'$si, pour tout $h \in X$.*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[J(u + th) - J(u) - \langle g(u), th\rangle\right] \ = 0$$

Définition 1.7 *La fonctionnelle $J : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Fréchet (ou tout simplement différentiable) en $u \in \Omega$ de différentielle $dJ(u) \in X'$ si*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[J(u + h) - J(u) - \langle dJ(u), h\rangle\right] \ = 0$$

Il est clair que tout fonctionnelle Fréchet-différentiable est continue et Gâteaux différentiable.

1.5 Fonctionnelles minimisantes

Définition 1.8 *[4] Soit J définit sur X ,à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$. Elle est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en x si, pour toute suite $\{x_n\}$ telle que x_n converge vers x ,on a :*

$$J(x) \ \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} J(x_n)$$

On dit que J définit sur X est s.c.i si elle s.c.i en tout point de X.

Définition 1.9 *On appelle suite minimisante de J dans X une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(u_n) \ = \inf_{x\in X} J(u)$$

Théorème 1.13 (Multiplicateur de Lagrange) ***[12]*** *Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^p$dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\nabla g \neq 0$ sur l'ensemble S défini par $g = C$, Alors si f admet un minimiseur x_0 donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.*

CHAPITRE

2

Points critiques et conditions de Palais-Smale

1- Pourquoi rechercher des points critiques ?

2- La condition de Palais-Smale.

Nous revenons aux problèmes non linéaires, vus sous l'angle du calcul des variations, non seulement en minimisant une fonctionnelle associée au problème, mais aussi en recherchant les points critiques. On rappelle que si $J : V \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle définie sur un espace de Banach V différentiable au sens de Fréchet, un point critique de J est un élément u de V qui annule la différentielle DJ de J et un point régulier de J est un point u tel que $DJ(u) \neq 0$. Une valeur critique de J est un nombre réel c tel qu'il existe $u \in V$ point critique de J tel que $J(u) = c$. Une valeur qui n'est pas critique est appelée valeur régulière de J. Naturellement, un point de minimum pour une telle fonctionnelle est un point critique, mais il peut y en avoir d'autres. Enfin, pour montrer l'existence d'un point critique, il suffit trouver une valeur critique.

2.1 Pourquoi rechercher des points critiques ?

étant donnés Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Il est clair que

$$|F(t)| \leq |t| \, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} .$$

Associons à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) dx. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1 *La fonctionnelle J est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. Sa différentielle est donnée par*

$$\langle DJ(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx - \int_\Omega f(u) v dx. \tag{2.2}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

2.2 La condition de Palais-Smale :

Quand nous avons minimisé une fonctionnelle du calcul des variations, un ingrédient essentiel a été la compacité relative (pour une certaine topologie) des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition apriori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non de valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 2.1 *Soit V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si pour toute suite u_n de V telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } DJ(u_n) \to 0 \text{ dans } V'$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Voici un exemple plus intéressant dans le contexte des EDP. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et régulier et l'opérateur qui à $f \in H_0^1(\Omega)$ associe la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f$, c'est-à-dire $T = (-\Delta)^{-1}$ en raison de la régularité elliptique $u \in H^3(\Omega)$ et le théorème de Rellich-Kondrašov implique que cet opérateur est compact (ce qui reste d'ailleurs vrai sans hypothèse de régularité sur l'ouvert). Par ailleurs

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega \nabla Tu.\nabla v dx = \int_\Omega uv dx = \langle v, Tu\rangle$$

par la caractérisation variationnelle de ce problème aux limites, donc T est autoadjoint positif sur $H_0^1(\Omega)$. La théorie des opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert permet donc de dire que son spectre est formé de 0 et d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie qui tend vers 0. Comme T est positif, les valeurs propres sont positives. On voit donc qu'il existe une suite $\lambda_k > 0$ qui tend vers $+\infty$ telle que pour $\lambda \neq \lambda_k$, l'opérateur
$T_\lambda = (-\Delta)^{-1} - \frac{1}{\lambda} Id$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 2.2 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, la fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega)$*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega f u dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale (pour tout niveau c) si $\lambda \neq \lambda_k$ et ne la satisfait pas si $\lambda = \lambda_k$.

Preuve Contrairement à l'habitude et de façon exceptionnelle, on va identifier le dual de $H_0^1(\Omega)$ avec $H_0^1(\Omega)$ lui-même par l'intermédiaire du produit scalaire (et non avec $H^{-1}(\Omega)$). On a

$$\langle DJ(u), v\rangle = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - \lambda uv)dx - \int_\Omega f uv dx$$

c'est-à-dire que $DJ(u) \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème variationnel

$$\int_\Omega \nabla(DJ(u)).\nabla v dx = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - \lambda uv)dx - \int_\Omega f uv dx$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, soit en d'autres termes

$$-\Delta(DJ(u)) = -\Delta u - \lambda u - f$$

soit encore

$$DJ(u) = u - \lambda(-\Delta)^{-1}u - (-\Delta)^{-1}f \in H_0^1(\Omega)$$

Donnons-nous une suite u_n telle que $DJ(u_n) \to 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$ (l'autre condition ne joue aucun rôle). Pour $\lambda \neq 0, \lambda \neq \lambda_k$ pour tout k, on a donc

$$DJ(u_n) = -\lambda\left((-\Delta)^{-1}u_n - \frac{1}{\lambda}u_n\right) - (-\Delta)^{-1}f = -\lambda T_\lambda u_n - (-\Delta)^{-1}f$$

Comme T_λ on a vu que est un isomorphisme, il vient

$$u_n = -\frac{1}{\lambda}T_\lambda^{-1}\left(DJ(u_n) + (-\Delta)^{-1}f\right) \to -\frac{1}{\lambda}T_\lambda^{-1}((-\Delta)^{-1}f) \text{ quand } n \to +\infty$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite. Pour $\lambda = 0$, on a $DJ(u_n) + (-\Delta)^{-1}f \to (-\Delta)^{-1}f$, d'où Palais-Smale également.

Supposons maintenant que $\lambda = \lambda_k$ pour un certain k et traitons le cas $f = 0$. Il existe une fonction propre associée $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ non nulle telle que $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ La suite $u_n = n\varphi_k$ est telle que $J(u_n) = 0, DJ(u_n) = 0$,

mais elle ne contient certainement aucune sous-suite convergente. ■

Remarque 2.1 *Notons que dès que $\lambda > \lambda_1$, la fonctionnelle J n'est pas bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$ (considérer la suite $n\varphi_1$). Cela ne l'empêche pas de satisfaire la condition de Palais-Smale.*

Passons à un exemple encore plus intéressant car nettement moins linéaire que le précédent.

Proposition 2.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ pour $n \geq 3$ et $1 < p < +\infty$ pour $n \leq 2$. Alors la fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega)$.*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale (pour tout niveau c).

Preuve Sous les hypothèses faites sur p, on a $p + 1 < 2^*$, l'exposant critique de Sobolev ($2^* = \frac{2n}{n-2}$pour $n \geq 3$), donc $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ et la fonctionnelle est bien définie sur $H_0^1(\Omega)$

on montre à l'aide d'arguments semblables à ceux déjà vus précédemment qu'elle est en fait de classe C^1 avec

$$\langle DJ(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p-1} uv dx$$

soit en identifiant le dual de $H_0^1(\Omega)$ avec $H_0^{-1}(\Omega)$, comme d'habitude cette fois-ci,

$$DJ(u) = -\Delta u + |u|^{p-1} u$$

Donnons-nous une suite u_n telle que $J(u_n) \to c$ et $DJ(u_n) = 0$ dans $H_0^{-1}(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Comme u_n appartient à $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle DJ(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx = (p+1)J(u_n) - \frac{p-1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$$

Or, par définition de la norme duale, on a

$$|\langle DJ(u_n), u_n\rangle| \leq \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

On en déduit donc l'estimation

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (p+1)J(u_n) + \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

On voit donc que pour n assez grand pour que $J(u_n) \leq c+1$ et $\|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 1$, la quantité $X_n = \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ satisfait l'inégalité

$$\frac{p-1}{2}X_n^2 - X_n - (p+1)(c+1) \leq 0$$

Comme $p-1 > 0$, on en déduit que X_n est bornée indépendamment de n, c'est à-dire que un est bornée dans. Comme $p+1 < 2^*$, l'injection de Sobolev

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ est compacte. On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée u_n) et trouver un $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u_n \to u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } u_n \to u \text{ dans } L^{p+1}(\Omega)$$

Notant que si $v \in L^{p+1}(\Omega)$, on a trivialement $|v|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, et raisonnant comme pour la démonstration du théorème de Carathéodory, on s'aperçoit que

$$|u_n|^{p-1} u_n \to |u|^{p-1} u \text{ dans } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

Or l'exposant conjugué de $p+1$ n'est autre que $\frac{p+1}{p}$ et comme $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ par dualité, il vient $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Finalement on a obtenu que

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) - |u_n|^{p-1} u_n \to |u|^{p-1} u \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

On a déjà noté que $(-\Delta)^{-1}$est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ ce qui montre que

$$u_n \to (-\Delta)^{-1}(-|u|^{p-1} u) \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite ■

Théorème 2.1 *Soit J une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach V minorée et satisfaisant la condition de Palais-Smale. Alors J atteint son minimum.*

CHAPITRE

3

La variété de Nehari pour les opérateurs elliptiques non locaux avec fonction concave-convexe

---

1- Introduction.
2- Quelques résultats préliminaires.
3- Le cas sous-critique : $0 < q < 1 < p < 2_s^* - 1$.
4- Le cas critique : $0 < q < 1 < p = 2_s^* - 1$.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la multiplicité de solutions de problème au limite par l'opérateur non local

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_k u(x) &= \lambda u^q + u^p, u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}, \tag{3.1}$$

où Ω est un ensemble régulière dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2s$ avec $s \in (0,1)$, λ est un paramètre positif, les exposants p et q satisfaisant $0 < q < 1 < p \leq 2_s^* - 1$ avec $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}(n > 2s)$,l'exposant fractionnaire de Sobolev et $\mathcal{L}_k$ est un opérateur de type fractionnaire non local défini comme suit :

$$-\mathcal{L}_k u(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy, x \in \mathbb{R}^n . \tag{3.2}$$

Ici, $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow (0, +\infty)$ est une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} \gamma K(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \gamma(x) = min\{|x|^2, 1\}; \\ \exists \theta > 0, \forall K(x) \geq \theta |x|^{-(n+2s)} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \\ K(x) = K(-x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \end{array} . \tag{3.3}$$

Un exemple typique pour K est donné par $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$ .Dans ce cas, le problème, (3.1) devient :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) &= \lambda u^q + u^p, u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}, \tag{3.4}$$

où $-(-\Delta)^s$ est l'opérateur fractionnaire de Laplace, qui peut être défini comme suit :

$$-(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}} dy, \ x \in \mathbb{R}^n . \tag{3.5}$$

Le but de cet chapitre était d'étudier la multiplicité de solutions aux problèmes (3.1) et (3.4) pour le cas sous-critique et le cas critique. En d'autres termes, nous utiliserons la méthode de variété de Nehari pour obtenir la multiplicité des solutions aux problèmes (3.1) et (3.4) dans les deux cas suivants :

- Cas sous-critique: $0 < q < 1, 1 < p < 2_s^* - 1$;
- Cas critique :$0 < q < 1, p = 2_s^* - 1$.

Dans les problèmes (3.1) et (3.4), le paramètre $s \in (0,1)$ est fixé et l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de frontière lipschitzienne ,$(n > 2s)$ .La condition homogène de Dirichlet $u = 0$ dans $\partial\Omega$ est remplacée par la condition que la fonction u est nulle dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, conformément au caractère

non local de l'opérateur $\mathcal{L}_K$. Les problèmes (3.1) et (3.4) ont une structure variationnelle et les solutions peuvent être des points critique d'une fonctionnelle d'énergie associée sur un espace approprié. Pour étudier les problèmes (3.1) et (3.4), en considérant aussi que dans la norme $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

Nous allons introduire l'espace fonctionnel que nous allons utiliser dans ce qui suit, qui a été introduit dans [15] par Servadei et Valdinoci. Nous introduisons cet espace comme suit

$$X = \left\{ u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonction mesurable, } u|_\Omega \in L^2(\Omega) \text{ et } (u(x)-u(y))\sqrt{K(x-y)} \in L^2(Q, dxdy) \right\} . \tag{3.6}$$

Avec $Q = \mathbb{R}^{2n} \backslash (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$ avec $\mathcal{C}\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. L'espace X menu de la norme définit comme suite :

$$\|u\|_X = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_Q |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.7}$$

Et en définit l'espace

$$X_0 = \{ u \in X : u = 0 \text{ p.p dans } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \} . \tag{3.8}$$

Avec la norme

$$\|u\|_{X_0} = \left(\int\limits_Q |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy \right)^{1/2} . \tag{3.9}$$

X_0 est un espace de Hilbert, alors on définit le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{X_0} = \int\limits_Q (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)dxdy. . \tag{3.10}$$

Pour cela, voir [15, lemme 7]. Pour plus de détails sur X et X_0 ainsi que pour leurs propriétés, nous renvoyons à [10].

Remarque 3.1 *(i) Selon les conditions de K, de [14, lemme 11], nous savons que $C_0^2(\Omega) \subseteq X_0$, et ainsi de suite X et X_0 ne sont pas vides. De plus, $X \subset H^s(\Omega)$ et $X_0 \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, où $H^s(\Omega)$ l'espace usuelle de Sobolev fractionnaire menu de la norme (dite norme de Gagliardo).*

$$\|g\|_{H^s(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int\limits_{\Omega * \Omega} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.11}$$

(ii) L'injection de $X_0 \hookrightarrow L^{2_s^*}(\Omega)$ *est continue où* $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}$.

Définition 3.1 *Nous dirons que* u *est une solution faible du problème (3.1), si* u *satisfait la formulation variationnelle :*

On multiple (3.1) par une fonction $\phi \in X_0$ *et on intégré sur* Ω *on obtient :*

$$\int_Q (u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))k(x-y)dxdy \;\; = \int_\Omega (\lambda u_+^q + u_+^p)\phi(x)dx \;\; . \tag{3.12}$$

Telle que $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Chaque solution faible de (3.1) est dans $L^\infty(\Omega)$ *d'après les résultats de [20, proposition 9] ou de [21,Théorème 3.1]. Le fait que* u *soit une solution faible équivaut à être un point critique de la fonctionnel suivante :*

$$J_\lambda(u) \;\; = \mathcal{I}_{K,p}(u) - \mathcal{I}_\lambda(u) \;\; . \tag{3.13}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{K,p}(u) &= \tfrac{1}{2}\int_Q |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \tfrac{1}{p+1}\int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx, \\ \mathcal{I}_\lambda(u) &= \tfrac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx. \end{aligned} \quad . \tag{3.14}$$

On peut voir que $J_\lambda \in C^1(X_0, \mathbb{R})$ *et*

$$\langle J'_\lambda(u), \varphi\rangle_{X_0} \;\; = \int_Q (u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))k(x-y)dxdy - \lambda\int_\Omega u_+^q\phi(x)dx - \int_\Omega u_+^p\phi(x)dx \;\; . \tag{3.15}$$

Notre premier résultat concerne le cas sous-critique.

Théorème 3.1 *Soit* $s \in (0,1)$, $n > 2s$ *et* Ω *un ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *avec frontière Lipschitzien . Laisser* K *être une fonction satisfaisant les conditions (3.3), si* $0 < q < 1$, $1 < p < 2_s^* - 1$, *alors il existe* $\lambda_1 > 0$, *tel que pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_1)$, *le problème (3.1) admet au moins deux solutions.*

Pour le cas critique, depuis l'injection de $X_0 \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^n)$ (ou, dans le cas du laplacien fractionnaire, $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas compact, la fonctionnelle d'énergie ne satisfait pas le Palais - Smalle globalement, mais il est vrais pour la fonctionnelle d'énergie dans une plage appropriée liée à la meilleure constante fractionnaire critique de Sobolev dans l'injection $X_0 \hookrightarrow L^{2_s^*}(\Omega)$.Pour cela, on définie la meilleure constante fractionnaire critique de Sobolev S_K

comme suite :

$$S_K \ = \inf_{v\in X_0\setminus\{0\}} \frac{\|v\|^2_{X_0}}{\|v\|^2_{L^{2^*_s}}}; \forall v \in X_0 \setminus \{0\} \ . \tag{3.16}$$

Théorème 3.2 *Soit $s \in (0,1), n > 2s$ et Ω un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec frontière Lipschitzienne. soit K soit une fonction satisfaisant les conditions (3.3), si $0 < q < 1, p = 2^*_s - 1$, supposons que il existe $u_0 \in X_0\setminus\{0\}$ avec $u_0 > 0$. dans $\mathbb{R}^n$, tel que :*

$$\sup \mathcal{I}_{K,2^*_s}(tu_0) \ \leq \tfrac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} \ . \tag{3.17}$$

$I_{K,2^*_s}$ est donné par (3.14). Alors, il existe $\lambda_2 > 0$, tel que pour $\lambda \in (0, \lambda_2)$ le problème (3.1) admet aux moins deux solutions.

Remarque 3.2 *Lorsque $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$, $\mathcal{L}_k$ est un laplacien fractionnaire $-(-\Delta)^s$, la condition (1.17) peut être garantis par les résultats de **[17, Section 4.2]**, ou **[2, Lemme 2.11]**.*

Remarque 3.3 *Lorsque $s = 1$, le problème (3.4) se réduit à une équation différentielle partielle de Laplace semi-linéaire standard. Plus précisément*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) & = \lambda u^q + u^p, u > 0 \ \textit{dans} \ \Omega; \\ u & = 0, \ \textit{sur} \ \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \ . \tag{3.18}$$

*Où Ω est un domaine lié dans $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, $0 < q < 1, 1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ et $\lambda > 0$ est un paramètre. **Ambrosetti – Brezis – Cerami [1]** a étudié le problème (3.18). Ils ont établi qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (3.18) admet au moins deux solutions pour $\lambda \in (0, \lambda_0)$ et une solution pour $\lambda = \lambda_0$ et aucun solution pour $\lambda > \lambda_0$. Il existe des résultats pour l'équation elliptique impliquant des non-linéarités concaves-convexes, voir par exemple **[5,6,23,24,26]** et les références qui y figurent.*

Ce chapitre est organisé comme suit : À la Sect. 2, nous donnons quelques notations et préliminaires sur Nehari cartes multiples et fibrantes. À la Sect. 3, nous considérons le cas sous-critique pour les opérateurs elliptiques non locaux $\mathcal{L}_K$ et donner la preuve du théorème 3.1. À la Sect. 4, nous traitons le cas critique et prouvons le théorème 3.2.

3.2 Quelques résultats préliminaires

Nous examinerons les points critiques de la fonctionnelle J_λ sur l'espace Hilbert X_0. Nous dénotons la variété de Nehari par :

$$\mathcal{N}_\lambda \ = \{u \in X_0\setminus\{0\} : \langle J'_\lambda(u), u\rangle_{X_0} = 0\} \ . \tag{3.19}$$

$\langle , \rangle_{X_0}$ est le produit scalaire sur X_0 donné par (3.10). Il est clair que tous les points critiques de J_λ doivent se trouver sur $N_\lambda$qu'il est un ensemble beaucoup plus petite que X_0 . Il est donc facile d'étudier la fonctionnalité de J_λ sur N_λ. On dite que $u \in N_\lambda$ si et seulement si

$$||u||^2_{X_0} - \lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \ = 0 \ . \tag{3.20}$$

La variété de Nehari $\mathcal{N}_\lambda$ est liée au comportement de la fonction de la forme $\varphi_u : t \to J_\lambda(tu)$ pour $t > 0$ défini par :

$$\varphi_u(t) \ = \frac{t^2}{2} ||u||^2_{X_0} - \lambda \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \ . \tag{3.21}$$

Ces cartes sont appelées cartes de fibrage et ont été introduites par Drabek et Pohozaev dans [9] et sont également discuté par Brown et Zhang [6], Brown et Wu [5].

Lemme 3.1 *Soit $u \in X_0 \backslash \{0\}, tu \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si $\varphi'_u(t) = 0$.*

Preuve *Le résultat est une conséquence du fait que :*

$$\varphi'_u(t) \ = \langle J'_\lambda(tu), u\rangle_{X_0} = \tfrac{1}{t}\langle J'_\lambda(tu), tu\rangle_{X_0} \ . \tag{3.22}$$

■

Ainsi, les éléments de $\mathcal{N}_\lambda$ correspondent aux points stationnaires des applications φ_u On remarque que

$$\varphi'_u(t) \ = t\,||u||^2_{X_0} - \lambda t^q \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - t^p \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \ . \tag{3.23}$$

$$\varphi''_u(t) \ = ||u||^2_{X_0} - q\lambda t^{q-1} \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - pt^{p-1} \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \ . \tag{3.24}$$

D'après lemme 3.1, $u \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si $\varphi'_u(1) = 0$ Par conséquent, pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, par (3.20) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi''_u(1) \ &= ||u||^2_{X_0} - q\lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - p \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \\ &= (1-p) \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx + \lambda(1-q) \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx \\ &= (1-q)\,||u||^2_{X_0} - (p-q) \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx \\ &= (1-p)\,||u||^2_{X_0} + \lambda(p-q) \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx \end{aligned} \ . \tag{3.25}$$

Il est donc naturel de scinder $\mathcal{N}_\lambda$ en trois parties correspondant aux minima locaux, aux maxima locaux et aux points d'inflexion, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda^+ \ &= \{u \in \ \mathcal{N}_\lambda \ : \varphi''_u(1) > 0 \ \}\,. \\ \mathcal{N}_\lambda^- \ &= \{u \in \ \mathcal{N}_\lambda \ : \varphi''_u(1) < 0 \ \}\,. \\ \mathcal{N}_\lambda^0 \ &= \{u \in \ \mathcal{N}_\lambda \ : \varphi''_u(1) = 0 \ \}\,. \end{aligned}$$

Nous allons prouver l'existence de solutions au problème (3.1) en recherchant l'existence de minimiseurs de fonctionnel J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$. Bien que $\mathcal{N}_\lambda$ soit un petit sous-ensemble de X_0, nous verrons que les minimiseurs locaux sur $\mathcal{N}_\lambda$. Nous avons les résultats suivant

Lemme 3.2 *Supposons que u_0 soit un minimiseur local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$ et $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$,Alors u_0 est un point critique de J_λ.*

Preuve Si u_0 minimiseur local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$ et ,alors u_0 est un solution de problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min J_\lambda(u) & = J_\lambda(u_0) \\ \gamma(u_0) & = 0 \end{cases} .$$

telle que : $\gamma(u) = ||u||^2_{X_0} - \lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx - \int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx$.D'après théorème 1.13, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq : $J'(u_0) = \mu\gamma'(u_0)$, alors

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle_{X_0} = \mu\langle \gamma'(u_0), u_0\rangle_{X_0}. \tag{3.26}$$

On a $u_0 \in N_\lambda$ alors $\langle J'(u_0), u_0\rangle_{X_0} = 0$,donc : $||u_0||^2_{X_0} = \lambda \int_\Omega u_{0+}^{q+1}(x)dx + \int_\Omega u_{0+}^{p+1}(x)dx$, de plus :

$$\langle \gamma'(u_0), u_0\rangle_{X_0} = ||u_0||^2_{X_0} - q\lambda \int_\Omega^{q+1} u_{0+}^{p+1}(x)dx - p\int_\Omega u_{0+}^{p+1}(x)dx.$$

On a $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0 \Leftrightarrow \varphi''_{u_0}(1) \neq 0 \Leftrightarrow \langle\ \gamma'(u_0), u_0\rangle_{X_0} \neq 0$, alors d'après (3.26), $\mu = 0$ donc on obtient la résultat. ■

Pour comprendre les cartes de fibrage de la variété de Nehari,considérons la fonction ψ_u : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\psi_u(t) = t^{1-q}\,||u||^2_{X_0} - t^{p-q}\int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx.$$

Il est clair que pour $t > 0$, $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si

$$\psi_u(t) = \lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx. \tag{3.27}$$

de plus

$$\psi'_u(t) = (1-q)t^{-q}\,||u||^2_{X_0} - (p-q)t^{p-q-1}\int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx. \tag{3.28}$$

et ainsi, nous pouvons voir que si $tu \in \mathcal{N}_\lambda$, alors :

$$t^q\psi'_u(t) = \varphi''_u(t). \tag{3.29}$$

Par conséquent, $tu \in \mathcal{N}_\lambda^+$(ou $\mathcal{N}_\lambda^-$) si et seulement si $\psi'_u(t) > 0$(ou $\psi'_u(t) \leq 0$)

Supposons $u \in X_0$ et $u_+ \not\equiv 0$. À partir de (3.28), ψ_u vérifie les propriétés suivantes :
(a) ψ_ua un point critique unique à

$$t = t_{\max}(u) = \left(\frac{(1-q)||u||^2_{X_0}}{(p-q)\int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx} \right)^{\frac{1}{1-p}} > 0.$$

(b) ψ_u strictement croissantes sur $(0, t_{\max}(u))$ et strictement decroissance sur $(t_{\max}(u), +\infty)$.
(c) $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_u(t) = -\infty$.
De plus, $\int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx > 0$.

$$\lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx > \psi_u(t_{\max}(u)) \quad = \left[(\tfrac{1-q}{p-q})^{\frac{1-q}{p-1}} - (\tfrac{1-q}{p-q})^{\frac{p-q}{p-1}} \right] \frac{||u||_{X_0}^{\frac{2(p-q)}{p-1}}}{(\int_\Omega u_+^{p+1}(x)dx)^{\frac{1-q}{p-1}}} \tag{3.30}$$

De plus, parmi (3.23) et (3.27) et si λ satisfait (3.30), alors $\varphi_u'(t) > 0$.Il est claire que $(\varphi_u'(t) < 0)$ lorsque λ est grand.

Par conséquent $tu \in N_\lambda$, pour tout $t > 0$. Par contre, si λ satisfait

$$0 \quad < \lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx < \psi_u(t_{\max}(u)) \ . \tag{3.31}$$

Alors il existes t_1 et t_2 avec $t_1 < t_{\max} < t_2$, tel que :

$$\psi_u(t_1) \quad = \psi_u(t_2) = \lambda \int_\Omega u_+^{q+1}(x)dx \text{ et } \psi_u'(t_1) > 0, \psi_u'(t_2) < 0.$$

(3.23) et (3.27) implique que $\varphi_u'(t_1) = \varphi_u'(t_2) = 0$. Par (3.29), nous avons que $\varphi_u''(t_1) > 0, \varphi_u''(t_2) < 0$.Ces faits impliquent que la carte de fibrage φ_u a un minimum local à t_1 et un maximum local à t_2 tel que $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ On peut voir les graphiques de $\psi_u(t)$ et $\varphi_u(t)$ dans Fig 1.

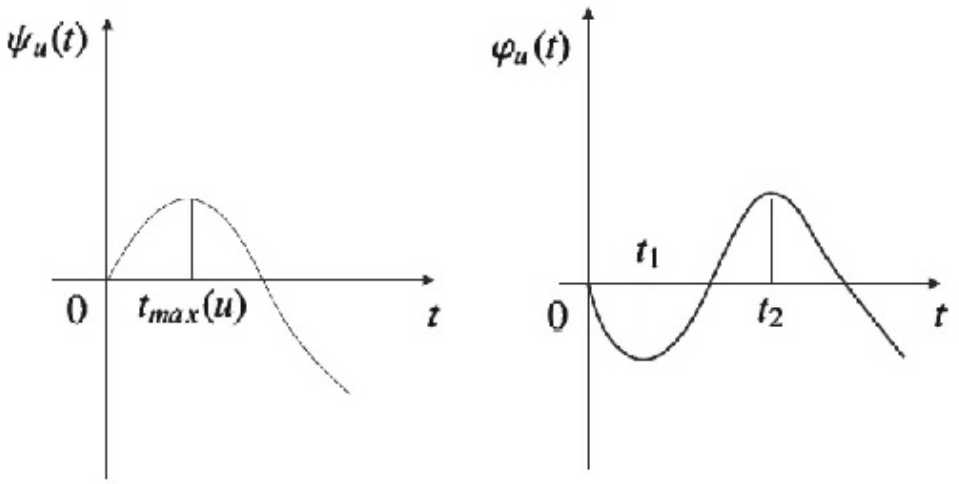


Fig 1

3.3 Le cas sous-critique : $0 < q < 1 < p < 2_s^* - 1$

Dans cette section, nous considérons plusieurs solutions de (3.1) pour le cas sous-critique.

Lemme 3.3 *Il existe $\lambda_1 > 0$, tel que $\forall \lambda \in (0, \lambda_1)$, nous avons $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$.*

Preuve Supposons que $\mathcal{N}_\lambda^0 \neq \emptyset, \forall \lambda > 0, \exists u \in \mathcal{N}_\lambda^0$ tq : $\langle J'_\lambda(u), u \rangle_{X_0} = 0$ et $\varphi''_u(1) = 0$, alors :

$$||u||^2_{X_0} = \lambda \int_\Omega u_+^{q+1} dx + \int_\Omega u_+^{p+1} dx \text{ et } ||u||^2_{X_0} = \lambda q \int_\Omega u_+^{q+1} dx + p \int_\Omega u_+^{p+1} dx.$$

donc

$$||u||^2_{X_0} \leq C_1 ||u||^{p+1}_{X_0}$$

et

$$||u||^2_{X_0} \leq \lambda C_2 ||u||^{q+1}_{X_0} .$$

Alors :

$$C_1^{\frac{1}{1-p}} \leq ||u||_{X_0} \leq (\lambda C_2)^{\frac{1}{1-q}}$$

Ceci est impossible si λ est suffisamment petit. Ainsi, nous obtenons qu'il existe $\lambda \in (0, \lambda_1)$ tel que pour tout nous avons $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$. ■

Lemme 3.4 *J_λ est coércive et borné inférieurement dans N_λ, $\forall \lambda \in (0, \lambda_1)$.*

Preuve On a :

$$J_\lambda(u) = \tfrac{1}{2} \|u\|^2_{X_0} - \tfrac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} dx - \tfrac{\lambda}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} dx .$$

on multiplier (3.13) par $\frac{1}{p+1}$:

$$\frac{1}{p+1}\|u\|_{X_0}^2 = \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega u_+^{q+1}dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_+^{p+1}dx \ .$$

Alors :

$$\frac{1}{p+1}\int_\Omega u_+^{p+1}dx = \frac{1}{p+1}\|u\|_{X_0}^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega u_+^{q+1}dx \ .$$

par substitution dans $J_\lambda(u)$ en obtient :

$$J_\lambda(u) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})\|u\|_{X_0}^2 - \lambda(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1})\int_\Omega u_+^{q+1}dx \ .$$

d'après théorème 1.1 et la remarque 3.1 (ii) , nous obtenons

$$\int_\Omega u_+^{q+1}dx \leq C_{n,q,s,|\Omega|}\|u\|_{X_0}^2$$

où $C_{n,q,s,|\Omega|}$ est une constante positive en fonction de $n, q, s, |\Omega|$. Puisque $0 \leq q \leq 1 \leq p$, on obtient alors que le fonctionnel $J_\lambda$est coercitive et borné inférieurement dans $\mathcal{N}_\lambda$. ■

D'après les lemmes 3.3 et 3.4, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$, nous savons que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ et J_λ est coércive et borné inférieurement dans un $\mathcal{N}_\lambda^+$ et $\mathcal{N}_\lambda^-$. Par conséquent, nous pouvons définir :

$$\alpha_\lambda^+ = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) \quad \text{et } \alpha_\lambda^- = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) \ .$$

Proposition 3.1 *Si $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, alors la fonctionnel J_λ a un minimiseur u_1 en $\mathcal{N}_\lambda^+$ et satisfait*
(1) $J_\lambda(u_1) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) < 0$.
(2) u_1 est une solution du problème (3.1).

Preuve Puisque $J_\lambda$est borné inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda^+$,il existe une suite minimisante $\{u_k\} \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) \ .$$

Ainsi, selon le Lemme 3.4 , la suite $\{u_k\}$ es bornée dans X_0. De [13, Lemme 7], $(X_0, ||u||_{X_0})$ est un espace Hilbert , et puis, il existe $u_1 \in X_0$ tel que, le sous suite $\{u_k\}$ converge faiblement dans X_0 alors :

$$\int_Q (u_k(x)-u_k(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy$$

$$\underset{k\to\infty}{\to} \int_Q (u_1(x)-u_1(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy, \forall\phi \in X_0,$$

et par [13, lemme-8], on a

$$u_k \to u_1 \text{dans } L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \quad , u_k \to u_1 \text{dans } \mathbb{R}^n \tag{3.32}$$

et par théorème 1.12, il existe $l \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$|u_k(x)| \quad \leq l(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

pour tout $1 \leq q+1 \leq 2_s^* = \frac{2n}{n-2s}(n > 2s)$. Par conséquent, et par théorème de convergence dominé, nous avons que

$$\int_\Omega (u_k)_+^{q+1} dx \quad \to \int_\Omega (u_1)^{q+1} dx \quad \text{et} \int_\Omega (u_k)_+^{p+1} dx \quad \to \int_\Omega (u_1)^{p+1} dx \ .$$

De plus, il existe t_1 tel que $t_1 u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $J_\lambda(t_1 u_1) < 0$. Nous avons donc $\inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) < 0$.Ensuite, nous montrons que $u_k \to u_1$ fortement dans X_0. supposent le contraire, alors : $\|u_1\|_{X_0} < \liminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_{X_0}$ Ainsi, pour $\{u_k\} \in \mathcal{N}_\lambda^+$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \varphi'_{u_k}(t_1) &= \lim_{k\to\infty} (t_1 \, ||u_k||_{X_0}^2 - \lambda t_1^q \int_\Omega (u_k)_+^{q+1}(x)dx - t_1^p \int_\Omega (u_k)_+^{p+1}(x)dx) \\ &> t_1 \, ||u_1||_{X_0}^2 - \lambda t_1^q \int_\Omega (u_1)_+^{q+1}(x)dx - t_1^p \int_\Omega (u_1)_+^{p+1}(x)dx \\ &= \varphi'_{u_1}(t_1) = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\varphi'_{u_1}(t_1) > 0$ pour k assez grand. $u_k \in \mathcal{N}_\lambda^+$, nous pouvons voir que $\varphi'_{u_k}(t_1) < 0$, pour $t \in (0, t_1)$ et $\varphi'_{u_k}(1) = 0$ pour tout k. Ensuite, il faut avoir $t_1 > 1$. Par contre $\varphi_{u_1}(t)$, décroissante sur $(0, t_1)$, et donc

$$J_\lambda(t_1 u_1) \quad \leq J_\lambda(u_1) \quad < \lim_{k\to\infty} J_\lambda(u_k) \quad = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u).$$

Ce qui est une contradiction. Donc, $u_k \to u_1$ fortement dans X_0. se qui implique

$$J_\lambda(u_k) \quad \to J_\lambda(u_1) \quad = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) \text{ comme } k \to \infty$$

À savoir, u_1 est un minimiseur de J_λ sur $\mathbf{N}_\lambda^+$. En utilisant le lemme 3.2, $u_1$est une solution de (3.1). ■

Ensuite, nous établissons l'existence d'un minimum local pour J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda^-$.

Proposition 3.2 *Si $0 < \lambda < \lambda_1$, la fonctionnelle J_λ a un minimiseur u_2 dans $\mathcal{N}_\lambda^-$ et satisfait*
(1) $J_\lambda(u_2) = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) > 0$.

(2) u_2 est une solution du problème (3.1).

Preuve Puisque $J_\lambda$est borné inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda^-$ il existe une suite minimisante $\{u_k\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

Selon le même argument donné dans la preuve de la proposition 3.1, il existe $u_2 \in X_0$ tel que, jusqu'à sous-suite,

$$\int_Q (u_k(x)-u_k(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy$$
$$\underset{k\to\infty}{\to} \int_Q (u_2(x)-u_2(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy, \forall \phi \in X_0,$$

$$\int_\Omega (u_k)_+^{q+1}dx \to \int_\Omega (u_2)^{q+1}dx \quad \text{et } \int_\Omega (u_k)_+^{p+1}dx \to \int_\Omega (u_2)^{p+1}dx$$

De plus, à partir de l'analyse des cartes de fibrage $\varphi_u(t)$ on sait qu'il existe t_1, t_2 avec $t_1 < t_{\max}(u) < t_2$ que $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+, t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$J_\lambda(t_1 u) < J_\lambda(tu) < J_\lambda(t_2 u).$$

Ensuite, nous montrons que $u_k \to u_2$ est fortement en X_0. supposons le contraire, alors

$$\|u_2\|_{X_0} < \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{X_0}.$$

Ainsi, pour $\{u_k\} \in \mathcal{N}_\lambda^-$ on a $J_\lambda(u_k) > J_\lambda(tu_k)$ pour tout $t > t_{\max}$ et

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_2u_2) &= \tfrac{t_2^2}{2}||u_2||_{X_0}^2 - \lambda\tfrac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega (u_2)_+^{q+1}(x)dx \\ &\quad -\tfrac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (u_2)_+^{p+1}(x)dx \\ &< \lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{t_2^2}{2}||u_k||_{X_0}^2 - \lambda\tfrac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega (u_k)_+^{q+1}(x)dx - \tfrac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (u_k)_+^{p+1}(x)dx\right) \\ &= J_\lambda(t_2u_k) \le J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u). \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. Par conséquent, $u_k \to u_2$ fortement dans X_0. Cela implique

$$J_\lambda(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_\lambda(u_2) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

À savoir, u_2 est un minimiseur si J_λ sur N_λ^-. En utilisant Lemma 3.2, u_2 est une solution de (3.1). ■

Preuve (de théorème 3.1) Dans les propositions 3.1 et 3.2 et le lemme 3.3, nous obtenons que le problème (3.1) a deux solutions $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $u_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ dans X_0. Depuis $\mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^- = \emptyset$ alors ces deux solutions sont distinctes. Ce termine la preuve. ■

3.4 Le cas critique : $0 < q < 1, p = 2_s^* - 1$

Dans cette section, nous examinons la multiplicité des solutions au problème (3.1) pour le cas critique, c.-à-d. $p = 2_s^* - 1 = \frac{n+2s}{n-2s}$.

Lemme 3.5 *Il existe $\lambda_* > 0$ tel que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$,$\forall\ \lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Preuve La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.3. ■

Lemme 3.6 *J_λ est coercitive et borné inférieurement dans $\mathcal{N}_\lambda$, $\forall \lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Preuve La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.4. ■

D'après les lemmes 3.5 et 3.6, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, nous savons que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ et J_λ est coèrcive et borné inférieurement dans un $\mathcal{N}_\lambda^+$ et $\mathcal{N}_\lambda^-$. Par conséquent, nous pouvons définir :

$$\tilde{\alpha}_\lambda^+ = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) \quad \text{et } \tilde{\alpha}_\lambda^- = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

Nous avons les résultats suivants.

Proposition 3.3 *Soit $\{u_k\} \subset X_0$ une suite $(PS)_c$ pour J_λ avec :*

$$c \ < \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^* - (q+1)}}.$$

Alors il existe une sous suite de $\{u_k\}$, qui converge fortement dans X_0, où S_k est défini dans (3.16) et M est une constante positive donnée par

$$M \ = \frac{(2n-(n-2s)(q+1))(1-q)}{4(q+1)} \left(\frac{(1-q)(n-2s)}{4s} \right)^{\frac{q+1}{2_s^* - (q+1)}} |\Omega| . \tag{3.33}$$

Preuve D'après le lemme 3.6, nous voyons que $\{u_k\}$ est borné dans X_0 . Puis, jusqu'à une suite, toujours notée par u_k , il existe $u_\infty \in X_0$ tel que $u_k \to u_\infty$ faiblement dans X_0, c'est-à-dire :

$$\int_Q (u_k(x) - u_k(y))(\phi(x) - \phi(y))K(x-y)dxdy$$

$$\underset{k\to\infty}{\to} \int_Q (u_\infty(x) - u_\infty(y))(\phi(x) - \phi(y))K(x-y)dxdy, \forall \phi \in X_0.$$

De plus, par [17, lemme 9], nous avons que :

$$u_k \to u_\infty \text{ dans } L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \quad , u_k \to u_\infty \text{dans } \mathbb{R}^n. \tag{3.34}$$

Et par [4.Théorème IV-9], il existe $l \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$|u_k(x)| \quad \leq l(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

pour tout $1 \leq q+1 < 2_s^* - 1 = \frac{2n}{n-2s}(n > \ 2s)$. Par conséquent, par théorème 1.12, nous avons que :

$$\int_\Omega (u_k)_+^{q+1} dx \ \ \to \int_\Omega (u_\infty)^{q+1} dx \ .$$

Par Lemme 1.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int\limits_Q |u_k(x) - u_k(y)|^2 K(x-y)dxdy \ \ &= \int\limits_Q |u_k(x) - u_\infty(x) - u_k(y) + u_\infty(y)|^2 K(x-y)dxdy \\ &+ \int\limits_Q |u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2 K(x-y)dxdy + o(1). \end{aligned}$$

.

et

$$\int_\Omega (u_k(x))_+^{2_s^*} dx \ \ = \int\limits_Q ((u_k - u_\infty)(x))_+^{2_s^*} dx + \int\limits_Q (u_\infty)(x))_+^{2_s^*} + o(1) \ .$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_k), u_k \rangle_{X_0} \ \ &= \int\limits_Q |u_k(x) - u_k(y)|^2 K(x-y)dxdy - \lambda \int\limits_\Omega (u_k(x))_+^{q+1} dx - \int\limits_\Omega (u_k(x))_+^{2_s^*} dx \\ &= \int\limits_Q |u_k(x) - u_\infty(x) - u_k(y) + u_\infty(y)|^2 K(x-y)dxdy \\ &+ \int\limits_Q |u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2 K(x-y)dxdy \ - \lambda \int\limits_\Omega (u_k(x))_+^{q+1} dx \\ &- \left(\int\limits_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))_+^{2_s^*} dx + \int\limits_\Omega (u_\infty)_+^{2_s^*} dx + o(1) \right) + o(1) \\ &\longrightarrow \int\limits_Q |(u_k - u_\infty)(x) - (u_k - u_\infty)(y)|^2 K(x-y)dxdy \\ &- \int\limits_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))_+^{2_s^*} dx + \langle J'_\lambda(u_\infty), u_\infty \rangle_{X_0} + 0(1). \end{aligned}$$

Par $\langle J'_\lambda(u_\infty), u_\infty\rangle_{X_0} = 0$ et $\langle J'_\lambda(u_k), u_k\rangle_{X_0} \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$,, nous savons que

$$\|u_k - u_\infty\|^2_{X_0} = \int_Q |(u_k - u_\infty)(x) - (u_k - u_\infty)(y)|^2 K(x-y)dxdy \longrightarrow b, \tag{3.35}$$

Et

$$\int_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))^{2^*_s}_+ dx \longrightarrow b, \text{ si } k \longrightarrow \infty \tag{3.36}$$

Si $b = 0$, la preuve est terminée. En supposant que $b > 0$, selon la définition de S_K dans (3.16),Alors :

$$\|v\|^2_{X_0} \geq S_K \|v\|^2_{L^{2^*_s}} .$$

On pose : $v = u_k - u_\infty$,
On obtient :

$$\|u_k - u_\infty\|^2_{X_0} \geq S_K \left(\int_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))^{2^*_s}_+ \right)^{\frac{2}{2^*_s}} .$$

Ainsi, nous avons $b \geq S_K b^{\frac{2}{2^*_s}}$ .c'est-à-dire $b \geq S_K^{\frac{n}{2s}}$. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\tfrac{1}{2}\|u_k\|^2_{X_0} - \lambda\tfrac{1}{1+q}\int_\Omega (u_k(x))^{q+1}_+ dx - \tfrac{1}{1+p}\int_\Omega (u_k(x))^{2^*_s}_+ dx \right) \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\tfrac{1}{2}\int_Q |(u_k - u_\infty)(x) - (u_k - u_\infty)(y)|^2 K(x-y)dxdy \right. \\ &+\tfrac{1}{2}\int_Q |u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2 K(x-y)dxdy \\ &-\lambda\tfrac{1}{1+q}\int_\Omega (u_k(x))^{q+1}_+ dx - \tfrac{1}{1+p}\int_\Omega (u_\infty(x))^{2^*_s}_+ dx \\ &\left. -\tfrac{1}{1+p}\int_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))^{2^*_s}_+ dx + o(1) \right) + o(1) \\ &\geq J_\lambda(u_\infty) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^*_s})S_K^{\frac{n}{2s}} \geq J_\lambda(u_\infty) + \tfrac{s}{n}S_K^{\frac{n}{2s}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

En supposant que $c < \frac{s}{n}S_K^{\frac{n}{2s}}$,on a $J_\lambda(u_\infty) < 0$. En particulier, $u_\infty \neq 0$ et

$$0 < \tfrac{1}{2}\|u_\infty\|^2_{X_0} < \tfrac{1}{2^*_s}\int_\Omega (u_\infty(x))^{2^*_s}_+ dx + \lambda\tfrac{1}{1+q}\int_\Omega (u_\infty(x))^{q+1}_+ dx. \tag{3.38}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k\longrightarrow\infty} J_\lambda(u=_k) = \lim_{k\longrightarrow\infty} J_\lambda(u_k) - \tfrac{1}{2}\left\langle J'_\lambda(u_k), u_k\right\rangle_{X_0} \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\tfrac{s}{n}\int\limits_\Omega (u_k-u_\infty)(x))_+^{2_s^*}dx + \tfrac{s}{n}\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx \right. \\ &\left. +\lambda\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)\int\limits_\Omega (u_k(x))_+^{q+1}dx \right) \\ &= \tfrac{s}{n}b + \tfrac{s}{n}\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx \\ &+\lambda\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{q+1}dx \\ &\geq \tfrac{s}{n}S_K^{\frac{n}{2s}} + \tfrac{s}{n}\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx + \lambda\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{q+1}. \end{aligned}$$

De plus, par théorème 1.1, nous avons

$$\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{q+1}dx \leq |\Omega|^{\frac{2_s^*-(1+q)}{2_s^*}}\left(\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx\right)^{\frac{1+q}{2_s^*}}. \tag{3.39}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} c &\geq \tfrac{s}{n}S_K^{\frac{n}{2s}} + \tfrac{s}{n}\left(\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx\right) \\ &+\lambda\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)|\Omega|^{\frac{2_s^*-(1+q)}{2_s^*}}\left(\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx\right)^{\frac{1+q}{2_s^*}} \\ &= \tfrac{s}{n}S_K^{\frac{n}{2s}} + h(\eta). \end{aligned}$$

Telle que

$$\begin{aligned} h(\eta) &= \tfrac{s}{n}\eta^{2_s^*} + \lambda\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)|\Omega|^{\frac{2_s^*-(1+q)}{2_s^*}}\eta^{q+1} \text{ avec } \eta = \left(\int\limits_\Omega (u_\infty(x))_+^{2_s^*}dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}} \\ h'(\eta) &= \tfrac{s(2_s^*)}{n}\eta^{2_s^*-1} + \lambda(q+1)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)|\Omega|^{\frac{2_s^*-(1+q)}{2_s^*}}\eta^q \\ h'(\eta) &= 0 \Leftrightarrow \eta^q\left(\tfrac{s(2_s^*)}{n}\eta^{2_s^*-(q+1)} + \lambda(q+1)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{1+q}\right)|\Omega|^{\frac{2_s^*-(1+q)}{2_s^*}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Nous notons que $h(\eta)$ atteint son minimum à

$$\eta_0 = \left(\frac{\lambda(1-q)(n-2s)}{4s}\right)^{\frac{1+q}{2_s^*-(1+q)}} |\Omega|^{\frac{1}{2_s^*}} .$$

et

$$h(\eta_0) \ = -\frac{(2n-(n-2s)(q+1))(1-q)}{4(q+1)} \left(\frac{(1-q)(n-2s)}{4s}\right)^{\frac{q+1}{2_s^*-(1+q)}} |\Omega|^{\frac{1}{2_s^*}} = -M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}}.$$

Avec M donné par (3.33). Donc

$$c \ \geq \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}}.$$

Ensuite, nous obtenons une contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent, $b = 0$ et, nous concluons que $u_k \to u_\infty$ fortement en X_0. Ceci complète la preuve ■

Proposition 3.4 *Il existe $\lambda_2 > 0$ et $u_0 \in X_0$ tel que :*

$$\sup_{t>0} J_\lambda(tu_0) \ < \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}} \ . \tag{3.40}$$

$\forall \lambda \in (0, \lambda_2)$.*En particulier,*

$$\tilde{\alpha}_\lambda^- \ < \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}}. \tag{3.41}$$

Où la constante M dépend de q, n, s et $|\Omega|$, donnée par (3.33).

Preuve Soit $\lambda_{**} > 0$ tel que $\frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}} > 0, \forall \lambda \in (0, \lambda_{**})$.Avec la condition (3.17),on a

$\exists u_0 \in X_0 \setminus \{0\}$ telle que

$$J_\lambda(tu_0) \ \leq \sup_{t\geq 0} \mathcal{I}_{k,2_s^*}(tu_0) - \lambda \frac{t^{q+1}}{1+q} \int_\Omega (u_0)_+^{q+1} dx \ < \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - \lambda \frac{t^{q+1}}{1+q} \int_\Omega (u_0)_+^{q+1} dx. \tag{3.42}$$

Soit

$$\lambda_{***} = \left(\frac{1}{M(q+1)} \left(t^{q+1} \int_\Omega (u_0)_+^{q+1} dx\right)\right)^{\frac{2_s^*-(1+q)}{q+1}} .$$

avec M positive constante définit dans (3.33).Alors,$\forall \lambda \in (0, \lambda_{***})$ on définit

$$-\frac{t^{q+1}}{1+q} \int_\Omega (u_0)_+^{q+1} dx \ < -M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^*-(1+q)}}.$$

Ainsi, nous obtenons que (3.42) est vrai. Finalement, nous définissons $\lambda_2 = min\{\lambda_*, \lambda_{**}, \lambda_{***}\}$; par l'analyse des cartes fibrant $\varphi_u(t) = J_\lambda(tu)$,on obtient :

$$\tilde{\alpha}_\lambda^- \quad < \frac{s}{n} S_K^{\frac{n}{2s}} - M\lambda^{\frac{2_s^*}{2_s^* - (1+q)}}.$$

Pour $\lambda \in (0, \lambda_2)$. Ceci complète la preuve . ■

Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème (3.2).

Preuve (de théorème 3.2) : Dans les propositions 3.4 et 3.4, il existe deux suites $\{u_k^+\}$ et $\{u_k^-\}$ dans X_0 telle que :

$$J_\lambda(u_k^+) \longrightarrow \tilde{\alpha}_\lambda^+,\ J'_\lambda(u_k^+) \longrightarrow 0 \quad \text{et } J_\lambda(u_k^-) \longrightarrow \tilde{\alpha}_\lambda^-,\ J'_\lambda(u_k^-) \longrightarrow 0,$$

Nous observons que, à partir de l'analyse des cartes de fibrage $\varphi_u(t)$, nous avons $\tilde{\alpha}_\lambda^+ < 0$. Similaire à la preuve de proposition 3.1 et 3.2 et théorème 3.1,le problème (3.1) a deux solutions $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $u_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ dans X_0.Depuis $\mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^- \neq \emptyset$,alors ces deux solutions sont distinctes. Ceci termine la preuve. ■

CHAPITRE

4

La variété de Nehari pour le P-laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s$

1- Introduction.
2- Quelques résultats préliminaires.
3- Le cas sous-critique : $0 < r < 1 < q < p_s^* - 1$.
4- Le cas critique : $0 < r < 1 < q = p_s^* - 1$.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la multiplicité de solutions de problème p-laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s$:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) &= f(x,u) + \lambda g(x,u), u > 0 \text{ dans } \Omega; \\ u &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $(-\Delta)_p^s$ est le P-laplacien fractionnaire définit comme suite :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+ps}} dy, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Où Ω est un ensemble régulière dans $\mathbb{R}^n, n > ps$ avec $s \in (0,1), \lambda$ est un paramètre positif, f et g sont des fonctions homogènes d'ordre q et r respectivement (i.e)

$$f(x,tu) = t^q f(x,u) \text{ et } g(x,tu) = t^r g(x,u)$$

Les exposants p, r et q satisfaisant : $0 < r < 1 < p < q \leq p_s^* - 1$,avec $p_s^* = \frac{np}{n-ps} (n > ps)$,l'exposant fractionnaire de Sobolev.

Notons

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds \geq 0 \text{ et } G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds \geq 0.$$

En déduit que F et G sont homogène d'ordre $(q+1)$ et $(r+1)$ respectivement (i.e)

$$F(x,tu) = t^{q+1} F(x,u) \text{ et } G(x,tu) = t^{r+1} G(x,u).$$

D'après les propriétés des fonctions homogènes, on a :

$$(q+1)F(x,u) = uf(x,u), \tag{4.2}$$

$$(r+1)G(x,u) = ug(x,u). \tag{4.3}$$

Ce qui implique qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ telle que :

$$F(x,u) \leq \gamma_1 |u|^{q+1}, \tag{4.4}$$

et

$$G(x,u) \leq \gamma_2 |u|^{r+1}. \tag{4.5}$$

Nous allons introduire l'espace fonctionnel que nous allons utiliser dans ce qui suite . Nous introduisons cet espace comme suite :

$$X = \left\{ u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonction mesurable, } u|_\Omega \in L^p(\Omega) \text{ et } \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n+ps}{p}}} \in L^p(Q, dxdy) \right\}.$$

Avec $Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$ avec $\mathcal{C}\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. L'espace X est menu de la norme définit comme suite :

$$\|u\|_X = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int\limits_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En définit l'espace de Banach

$$X_0 = \{ u \in X : u = 0 \text{ p.p dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \}, \tag{4.6}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{X_0} = \left(\int\limits_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.7}$$

Remarque 4.1 *i)* $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in (1, p_s^*)$.

ii) $X_0 \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)$.

iii) $\forall u, v \in X_0$; *on a le produit de dualité :*

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int\limits_Q \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy. \tag{4.8}$$

Définition 4.1 *Nous dirons que u est une solution faible du problème (4.1), si u satisfait la formulation variationnelle :*

$$\int\limits_Q \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy = \int\limits_\Omega f(x,u)v(x)dx + \lambda \int\limits_\Omega g(x,u)v(x)dx .$$

Le fait que u soit une solution faible équivaut à être un point critique de la fonctionnel suivante :

$$J_\lambda(u) = \mathcal{I}_{p,q}(u) - \lambda C(u).$$

Avec

$$\mathcal{I}_{p,q}(u) = \frac{1}{p}A(u) - B(u), \tag{4.9}$$

où

$$\begin{aligned} A(u) &= \|u\|_{X_0}^p, \\ B(u) &= \int_\Omega F(x,u)dx, \\ C(u) &= \int_\Omega G(x,u)dx. \end{aligned}$$

On peut voir que $J_\lambda \in C^1(X_0, \mathbb{R})$ et

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = A(u) - (q+1)B(u) - \lambda(r+1)C(u).$$

Théorème 4.1 *Soit $s \in (0,1)$, $n > ps$ et Ω un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec frontière Lipschitzien. Si $0 < r < 1 < q < p_s^* - 1$, alors il existe $\lambda_1 > 0$, tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$, le problème (4.1) admet au moins deux solutions.*

Pour le cas critique, depuis l'injection de $X_0 \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas compact, la fonctionnelle d'énergie ne satisfait pas le Palais - Smale globalement, mais il est vrais pour la fonctionnelle d'énergie dans une plage appropriée liée à la meilleure constante fractionnaire critique de Sobolev dans l'injection $X_0 \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$, définie comme suite :

$$S_p = \inf_{v \in X_0 \backslash \{0\}} \frac{\|v\|_{X_0}^p}{\|v\|_{L^{p_s^*}}^p}, \forall v \in X_0 \backslash \{0\}. \tag{4.10}$$

Théorème 4.2 *Soit $s \in (0,1), n > ps$ et Ω un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec des bords de Lipschitz. si $0 \leq r \leq 1, q = p_s^* - 1$, supposons que il existe $u_0 \in X_0 \backslash \{0\}$ avec $u_0 > 0$. dans $\mathbb{R}^n$, tel que :*

$$\sup \mathcal{I}_{p,q}(tu_0) < \frac{s}{n} S^{\frac{n}{ps}} . \tag{4.11}$$

$I_{p,q}$ est donné par (4,9). Alors, il existe $\lambda_* > 0$, tel que pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$ le problème (4.1) admet aux moins deux solutions.

4.2 Quelques résultats préliminaires

Nous examinerons les points critiques de la fonctionnelle J_λ sur l'espace de Banach X_0. Nous dénotons la variété de Nehari par :

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in X_0 \backslash \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u\rangle_{X_0} = 0\},$$

où $\langle , \rangle_{X_0}$ est le produit de dualité sur X_0.Il est clair que tous les points critiques de J_λ doivent se trouver sur $\mathcal{N}_\lambda$ et $\mathcal{N}_\lambda$ est un ensemble beaucoup plus petit que X_0. Il est donc facile d'étudier la fonctionnelle J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$. Il est facile de voir que $u \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si

$$\frac{1}{p}\,||u||_{X_0}^p - \int_\Omega uf(x,u)dx - \lambda \int_\Omega ug(x,u)dx \;\; = 0. \tag{4.12}$$

La variété de Nehari $\mathcal{N}_\lambda$ est étroitement liée au comportement de la fonction de la forme $\varphi_u : t \to J_\lambda(tu)$ pour $t > 0$ défini par :

$$\varphi_u(t) \;\; = \frac{t^p}{p}A(u) - t^{q+1}B(u) - \lambda t^{r+1}C(u), \tag{4.13}$$

Ces cartes sont appelées cartes de fibrage et ont été introduites par Drabek et Pohozaev dans [9] et sont également discuté par Brown et Zhang [6], Brown et Wu [5].

Lemme 4.1 *Soit $u \in X_0\backslash\{0\}, tu \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si $\varphi_u'(t) = 0$.*

Preuve *Le résultat est une conséquence du fait que*

$$\varphi_u'(t) \;\; = \langle J_\lambda'(tu), u\rangle_{X_0} = \frac{1}{t}\langle J_\lambda'(tu), tu\rangle_{X_0}.$$

■

Ainsi, les éléments de $\mathcal{N}_\lambda$ correspondent aux points stationnaires des cartes φ_u On remarque que

$$\varphi_u'(t) \;\; = t^{p-1}A(u) - (q+1)t^qB(u) - \lambda(r+1)t^rC(u), \tag{4.14}$$

$$\varphi_u''(t) \;\; = (p-1)\,t^{p-2}A(u) - q(q+1)t^{q-1}B(u) - \lambda r(r+1)t^{r-1}C(u)\;. \tag{4.15}$$

D'après le lemme 4.1, on a $u \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si $\varphi_u'(1) = 0$, par conséquent, pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, par (4.14) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_u''(1) \;\; &= (p-1)\,A(u) - q(q+1)B(u) - \lambda r(r+1)C(u) \\
&= (p-q-1)(q+1)B(u) + \lambda(r+1)(p-r-1)C(u) \\
&= (p-q-1)A(u) + \lambda(r+1)(q-r)C(u) \\
&= (p-r-1)A(u) - \lambda(q+1)(r-q)B(u).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Il est donc naturel de devisé $\mathcal{N}_\lambda$ en trois parties correspondant aux minimum et maximum locaux et aux points d'inflexion, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda^+ \;\; &= \{u \in N : \varphi_u''(1) > 0\}\,, \\
\mathcal{N}_\lambda^- \;\; &= \{u \in N_\lambda : \varphi_u''(1) < 0\}\,, \\
\mathcal{N}_\lambda^0 \;\; &= \{u \in N_\lambda : \varphi_u''(1) = 0\}\,.
\end{aligned}$$

Lemme 4.2 *Supposons que u_0 soit un minimiseur local de J_λ sur$\mathcal{N}_\lambda$ et $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$. Alors, u_0 est un point critique.*

Preuve *Si u_0 minimiseur local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$ et ,alors u_0 est un solution de le problème d'optimisation suivant :*

$$\begin{cases} \min J_\lambda(u) & = J_\lambda(u_0), \\ \beta(u_0) & = 0, \end{cases}$$

telle que :

$$\beta(u) = A(u) - (q+1)B(u) - \lambda(r+1)C(u).$$

D'après théoréme1.13, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq : $J'(u_0) = \alpha\beta'(u_0)$, on a

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle_{X_0} = \alpha\langle\beta'(u_0), u_0\rangle_{X_0}. \tag{4.17}$$

Comme, $u_0 \in N_\lambda$, alors $\langle J'(u_0), u_0\rangle_{X_0} = 0$ et

$$A(u_0) = (q+1)B(u_0) + \lambda(r+1)C(u_0),$$

de plus :

$$\begin{aligned} \langle\beta'(u_0), u_0\rangle_{X_0} &= pA(u_0) - (q+1)\int_\Omega u_0 f(x,u_0)dx \\ &\quad -\lambda(r+1)\int_\Omega u_0 g(x,u_0)(dx \\ &= (p-1)A(u_0) - q\int_\Omega u_0 f(x,u_0)dx \\ &\quad -\lambda r\int_\Omega u_0 g(x,u_0)dx, \end{aligned}$$

d'aprés (4,2) et (4,3) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle\beta'(u_0), u_0\rangle_{X_0} &= (p-1)A(u_0) - q(q+1)B(u_0) - \lambda r(r+1)C(u_0) \\ &= \varphi''_{u_0}(1) \end{aligned}$$

On a $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0 \Leftrightarrow \varphi''_{u_0}(1) \neq 0 \Leftrightarrow \langle\beta'(u_0), u_0\rangle_{X_0} \neq 0$, alors, d'après(4.17), $\alpha = 0$, d'où le résultat. ■

Pour comprendre les cartes de la variété et de la fibrage de Nehari, considérons la fonction $\psi_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\psi_u(t) = t^{p-r-1}A(u) - (q+1)t^{q-r}B(u) \ .$$

Il est clair que pour $t > 0$, $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si

$$\psi_u(t) = \lambda(r+1)C(u) \ , \tag{4.18}$$

en outre :

$$\psi'_u(t) \ = (p-r-1)t^{p-r-2}A(u) - (q+1)(q-r)t^{q-r-1}B(u) \ , \tag{4.19}$$

et ainsi, nous pouvons voir que si $tu \in \mathcal{N}_\lambda$, alors :

$$t^r\psi'_u(t) \ = \varphi''_u(t) \ . \tag{4.20}$$

Par conséquent, $tu \in \mathcal{N}_\lambda^+$(ou $\mathcal{N}_\lambda^-$) si et seulement si $\psi'_u(t) > 0$(ou $\psi'_u(t) \leq 0$).
Supposons $u \in X_0$ et $u_+ \not\equiv 0$. À partir de (4.19), ψ_u vérifie les propriétés suivantes :
(a) ψ_u a un point critique unique à

$$t = t_{\max}(u) = \left[\frac{A(u)}{B(u)}\frac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right]^{\frac{1}{q-p+1}}$$

$$\begin{aligned}\psi_u(t_{\max}) \ &= \left(\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\tfrac{A(u)}{B(u)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} A(u) \\ &-(q+1)\left(\tfrac{A(u)}{B(u)}\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{q-r}{q-p+1}} B(u) \\ &= \left(\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\tfrac{q-p+1}{q-r}\right)\left(\tfrac{A(u)^{q-r}}{B(u)^{p-r-1}}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} .\end{aligned}$$

(b) ψ_u croissante strictement sur $(0, t_{\max}(u))$ et décroissante strictement sur $(t_{\max}(u), +\infty)$;
(c) $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_u(t) = -\infty$.
On a :

$$\psi_u(t_{\max}) - \lambda(r+1)C(u) = \left(\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\tfrac{q-p+1}{q-r}\right)\left(\tfrac{A(u)^{q-r}}{B(u)^{p-r-1}}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} - \lambda(r+1)C(u),$$

d'après les propriétés (4.4) et (4.5) et d'après Hölder :

$$B(u) \ = \int_\Omega F(x,u)dx \leq \gamma_1 |\Omega|^{\frac{p_s^*-q-1}{p_s^*}} \|u\|^{q+1}_{L^{p_s^*}},$$

en utilisant l'inégalité

$$\|u\|^{q+1}_{L^{p_s^*}} \ \leq s_p^{-\frac{q+1}{p}} \|u\|^{q+1}_{X_0}.$$

On obtient

$$B(u) \ \leq \gamma_1 s_p^{-\frac{q+1}{p}} |\Omega|^{\frac{p_s^*-q-1}{p_s^*}} A(u)^{\frac{q+1}{p}}. \tag{4.21}$$

De même façon, on aura

$$C(u) \ \leq \gamma_2 s_p^{-\frac{r+1}{p}} |\Omega|^{\frac{p_s^*-r-1}{p_s^*}} A(u)^{\frac{r+1}{p}}. \tag{4.22}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\psi_u(t_{\max}) - \lambda(r+1)C(u) \\
= &\left(\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\tfrac{q-p+1}{q-r}\right) \left(\tfrac{A(u)^{q-r}}{B(u)^{p-r-1}}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} - \lambda(r+1)C(u) \\
\geq &\left((r+1)\gamma_2 s_p^{-\frac{r+1}{p}} |\Omega|^{\frac{p_s^*-r-1}{p_s^*}}\right) \left(\left(\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\tfrac{(q-p+1)}{(r+1)(q-r)}\right) \tfrac{\gamma_1^{\frac{p-r-1}{p-q-1}}}{\gamma_2} |\Omega|^{\frac{(q-r)(p_s^*-p)}{p_s^*(p-q-1)}} s_p^{\frac{r-q}{p-q-1}} - \lambda\right) A(u)^{\frac{r+1}{p}} \\
= &\left((r+1)\gamma_2 s_p^{-\frac{r+1}{p}} |\Omega|^{\frac{p_s^*-r-1}{p_s^*}}\right) (\lambda_* - \lambda) A(u)^{\frac{r+1}{p}},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

telle que

$$\lambda_* = \left(\tfrac{1}{r+1}\tfrac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\tfrac{q-p+1}{q-r}\right) \tfrac{k_1^{\frac{p-r-1}{p-q-1}}}{k_2} |\Omega|^{\frac{(q-r)(p_s^*-p)}{p_s^*(p-q-1)}} s_p^{\frac{r-q}{p-q-1}}.$$

De plus,parmi (4.14), et (4.18) et si $\lambda < \lambda_*$ satisfait (4.23), alors $\varphi_u'(t) > 0$.Il semble que $(\varphi_u'(t) < 0)$ lorsque λ est grand. Par conséquent $tu \in \mathcal{N}_\lambda$, pour tout $t > 0$. Par contre, si λ satisfait

$$0 < \lambda(r+1)C(u) \quad < \psi_u(t_{\max}(u))$$

alors il existe t_1 et t_2 avec $t_1 < t_{\max}(u) < t_2$, tel que :

$$\psi_u(t_1) = \psi_u(t_2) = \lambda(r+1)C(u) \quad \text{et } \psi_u'(t_1) > 0, \psi_u'(t_2) < 0$$

Les relations (4.14) et (4.18) implique que $\varphi_u'(t_1) = \varphi_u'(t_2) = 0$. Par (4.20), nous avons que $\varphi_u''(t_1) > 0, \varphi_u''(t_2) < 0$. Ces faits impliquent que la carte de fibrage φ_u a un minimum local à t_1 et un maximum local à t_2 tel que $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ On peut voir que les graphiques de $\psi_u(t)$ et $\varphi_u(t)$ sont visibles à la Fig.2.

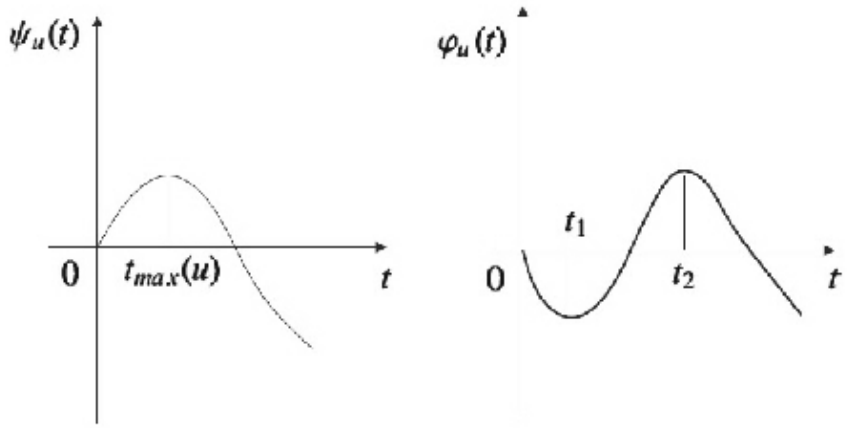


Fig 2

4.3 Le cas sous-critique : $0 < r < 1 < q < p_s^* - 1$

Dans cette section, nous considérons plusieurs solutions de (4.1) pour le cas sous-critique.

Lemme 4.3 *Il existe $\lambda_* > 0$, tel que $\forall\ \lambda \in (0, \lambda_*)$, nous avons $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$.*

Preuve on suppose que $\mathcal{N}_\lambda^0 \neq \emptyset, \exists u_0 \in \mathcal{N}_\lambda^0, \varphi_{u_0}^{''}(1) = 0, \varphi_{u_0}^{'}(1) = 0$ donc :

$$\begin{array}{rl} \varphi_{u_0}^{''}(1) = 0 & \Leftrightarrow (p-r-1)A(u_0) + \lambda(q+1)(r-q)B(u_0) = 0 \\ & \Rightarrow B(u_0) = \frac{(r-p+1)}{(q+1)(r-q)}A(u_0) \end{array} ,$$

$$\begin{array}{rl} & \varphi_{u_0}^{'}(1) = 0 \\ \Leftrightarrow & A(u_0) - (q+1)B(u_0) - \lambda(r+1)C(u_0) \\ & = A(u_0) - \frac{r-p+1}{r-q}A(u_0) - \lambda(r+1)C(u_0) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{p-q-1}{r-q}A(u_0) - \lambda(r+1)C(u_0) = 0, \\ & C(u_0) = \left(\frac{p-q-1}{r-q}\right)\frac{1}{\lambda(r+1)}A(u_0), \end{array} \tag{4.24}$$

$$\begin{array}{rl} \psi_{u_0}(t_{\max}) - \lambda(r+1)C(u_0) & = \left(\frac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\frac{q-p+1}{q-r}\right)\left(\frac{A(u)^{q-r}}{B(u)^{p-r-1}}\right)^{\frac{1}{q-p}} \\ & -\lambda(r+1)C(u_0) \\ & = \left(\frac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{p-r-1}{q-p+1}} \left(\frac{q-p+1}{q-r}\right)\left(\frac{(p-r-1)}{(q+1)(q-r)}\right)^{\frac{r-p+1}{q-p+1}} A(u_0) \\ & - \left(\frac{p-q-1}{r-q}\right)A(u_0) = 0. \end{array}$$

alors

$$\psi_{u_0}(t_{\max}) - \lambda(r+1)C(u_0) = 0\ ,$$

ce qui donne une contradiction, d'où $N_\lambda^0 = \emptyset$. ■

Lemme 4.4 *J_λ est coèrctive et borné inférieurement dans $\mathcal{N}_\lambda, \forall\lambda \in (0, \lambda^*)$*

Preuve Si $u \in \mathcal{N}_\lambda$, (4.14) impliquent que

$$\begin{array}{rl} J_\lambda(u) & = \frac{1}{p}\|u\|_{X_0}^p - \int_\Omega F(x,u)dx - \lambda\int_\Omega G(x,u)dx \\ & = \frac{1}{p}A(u) - B(u) - \lambda C(u), \\ \text{on a } \varphi_u^{'}(1) = 0 & \Rightarrow B(u) = \frac{1}{(q+1)}\left(A(u) - \lambda(r+1)C(u)\right). \end{array} .$$

Donc

$$J_\lambda(u) = A(u)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right) - \lambda C(u)\left(\frac{q-r}{q+1}\right)\ .$$

Alors

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q+1}\right)A(u)-\lambda k_2 s_p^{\frac{-(r+1)}{p}}|\Omega|^{\frac{p_s^*-r-1}{p_s^*}}A(u)^{\frac{r+1}{p}}$$

Donc, $J_\lambda(u)$ est coércive et borné inférieurement. ■

Alors $\mathcal{N}_\lambda=\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^-$ telle que $\mathcal{N}_\lambda^+\cap\mathcal{N}_\lambda^-=\emptyset$ et de plus $\exists\beta_\lambda^-,\beta_2^+\in\mathbb{R}$ tq :

$$\begin{aligned}\beta_\lambda^- &= \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-}J_\lambda(u)\\ \beta_\lambda^+ &= \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+}J_\lambda(u)\end{aligned}.$$

Proposition 4.1 *Si $0<\lambda<\lambda_*$, la fonctionnelle J_λ a un minimiseur u^* dans $\mathcal{N}_\lambda^+$ et satisfait*
(1) $J_\lambda(u^*)=\inf\limits_{u\in N_\lambda^+}J_\lambda(u)\leq 0$.
(2) u^* est une solution du problème (4.1).

Preuve Puisque $J_\lambda$est borné inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda^+$ alors il existe une suite minimisante $\{u_k\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$ tel que

$$\lim_{k\to\infty}J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+}J_\lambda(u)$$

Ainsi, selon le lemme (4.4), la suite $\{u_k\}$ es bornée dans X_0. De [15, Lemme 7], $(X_0,||u||_{X_0})$ est un espace de Banach réflexive , et puis, il existe $u^*\in X_0$ tel que, la sous-suite,

$$\int_Q \frac{|u_k(x)-u_k(y)|^{p-2}(u_k(x)-u_k(y))(\phi(x)-\phi(y))dxdy}{|x-y|^{n+ps}}$$
$$\underset{k\to\infty}{\to}\int_Q \frac{|u^*(x)-u^*(y)|^{p-2}(u^*(x)-u^*(y))(\phi(x)-\phi(y))dxdy}{|x-y|^{n+ps}},\forall\phi\in X_0,$$

et par [4, théorème IV-9], il existe sous-suite et il existe $l\in L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$u_k\to u^*\text{dans } L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \quad ,\text{dans } u_k\to u^*\mathbb{R}^n,$$

$$|u_k(x)| \leq l(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

pour tout $1<q+1<p_s^*$

$$\int_\Omega F(x,u_k)dx < \gamma_1\int_\Omega|u|^{q+1}<+\infty \text{ car } |u|^{q+1}\in L^1(\Omega).$$

Alors, $\int_\Omega F(x,u_k)\in L^1(\Omega)$ Par conséquent, par **théorème 1.12**, nous avons que

$$\int_\Omega F(x,u_k)dx \underset{k\to\infty}{\to}\int_\Omega F(x,u^*)dx.$$

De même façon

$$\int_\Omega G(x,u_k)dx \underset{k\to\infty}{\to} \int_\Omega G(x,u^*)dx.$$

De plus, il existe t_1 tel que $t_1u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $J_\lambda(t_1u^*) < 0$. Nous avons donc $\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) < 0$. Ensuite, nous montrons que $u_k \to u^*$ fortement dans X_0. Si non, alors: $\|u^*\|_{X_0} < \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{X_0}$ Ainsi, pour $\{u_k\} \in \mathcal{N}_\lambda^+$ on a :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \varphi'_{u_k}(t_1) &= \lim_{k\to\infty} \left(t_1^{p-1}\,||u_k||_{X_0}^p - (q+1)t_1^q \int_\Omega F(x,u_k)dx\right.\\ &\quad \left. - \lambda(r+1)t_1^r \int_\Omega G(x,u_k)dx\right)\\ &> t_1\,||u^*||_{X_0}^p - (q+1)t_1^q \int_\Omega F(x,u^*)dx\\ &\quad -\lambda(r+1)t_1^r \int_\Omega G(x,u^*)dx\\ &= \varphi'_{u^*}(t_1) = 0.\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\varphi'_{u_1}(t_1) > 0$ pour k assez grand. Depuis $u_k = 1.u_k \in \mathcal{N}_\lambda^+$, nous pouvons voir que $\varphi'_{u_k}(t_1) < 0$, pour $t \in (0,t_1)$ et $\varphi'_{u_k}(1) = 0$ pour tout k. Ensuite, il faut avoir $t_1 > 1$. Par contre $\varphi_{u^*}(t)$, décroissante sur $(0,t_1)$, et donc

$$J_\lambda(t_1u^*) \le J_\lambda(u^*) < \lim_{k\to\infty} J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u).$$

Ce qui est une contradiction. Donc, $u_k \to u^*$ fortement dans X_0. Cela implique que

$$J_\lambda(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_\lambda(u_1) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u).$$

À savoir, u^* est un minimiseur de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda^+$. En utilisant le lemme 4.2, u^*est une solution de (4.1). Ensuite, nous établissons l'existence d'un minimum local pour J_λ sur N_λ^-. ■

Proposition 4.2 *Si $0 < \lambda < \lambda_*$, la fonctionnelle J_λ a un minimiseur u^{**} dans $\mathcal{N}_\lambda^-$ et satisfait*

(1) $J_\lambda(u^{**}) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) > 0$.

(2) u^{**} est une solution du problème (4.1).

Puisque $J_\lambda$est borné inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda^-$ il existe une suite minimisante $\{u_k\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} J_\lambda(u_k) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

Selon le même argument donné dans la preuve de la proposition précédente, il existe $u^{**} \in X_0$ tel que, jusqu'à sous-suite ,

$$\int\limits_Q \frac{|u_k(x)-u_k(y)|^{p-2}(u_k(x)-u_k(y))(\phi(x)-\phi(y))dxdy}{|x-y|^{n+ps}}$$
$$\underset{k\to\infty}{\to} \int\limits_Q \frac{|u^{**}(x)-u^{**}(y)|^{p-2}(u^{**}(x)-u^{**}(y))(\phi(x)-\phi(y))dxdy}{|x-y|^{n+ps}}, \forall \phi \in X_0,$$

et

$$\begin{array}{ll} \int_\Omega F(x,u_k)dx & \underset{k\to\infty}{\to} \int_\Omega F(x,u^{**})dx \\ \text{et } \int_\Omega G(x,u_k)dx & \underset{k\to\infty}{\to} \int_\Omega G(x,u^{**})dx. \end{array}$$

De plus, à partir de l'analyse des cartes de fibrage $\varphi_u(t)$ on sait qu'il existe t_1, t_2 avec $t_1 < t_{\max}(u) < t_2$ que $t_1 u \in N_\lambda^+, t_2 u \in N_\lambda^-$ et $J_\lambda(t_1 u) < J_\lambda(tu) < J_\lambda(t_2 u)$. Ensuite, nous montrons que $u_k \to u^{**}$ est fortement en X_0. Si non, alors $\|u^{**}\|_{X_0} < \liminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_{X_0}$ Ainsi, pour $\{u_k\} \in N_\lambda^-$ on a $J_\lambda(u_k) > J_\lambda(tu_k)$ pour tout $t > t_{\max}$ et

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_2 u^{**}) &= \tfrac{t_2^p}{2} ||u^{**}||_{X_0}^2 - t_2^{q+1} \int_\Omega F(x,u^{**})dx - \lambda t_2^{r+1} \int_\Omega G(x,u^{**})dx \\ &< \lim_{k\to\infty} (\tfrac{t_2^p}{2} ||u_k||_{X_0}^2 - t_2^{q+1} \int_\Omega F(x,u_k)dx - \lambda t_2^{r+1} \int_\Omega G(x,u_k)dx) \\ &= \lim_{k\to\infty} J_\lambda(t_2 u_k) \le J_\lambda(u_k) \\ &= \inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, $u_k \to u^{**}$ fortement dans X_0. Cela implique

$$J_\lambda(u_k) \to J_\lambda(u^{**}) \quad = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) \text{ comme } k \to \infty$$

À savoir, u^{**} est un minimiseur si J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda^-$. En utilisant Lemme 4.2, u^{**} est une solution de (4.1).

Preuve (théorème 4.1) Dans les propositions 4.1 et 4.2 et le lemme 4.2, nous obtenons que le problème (4.1) a deux solutions $u^* \in N_\lambda^+$ et $u^{**} \in N_\lambda^-$ dans X_0. Depuis $\mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^- = \emptyset$ alors ces deux solutions sont distinctes. Ce qui termine la preuve. ■

4.4 Le cas critique : $0 < r < 1 < q = p_s^* - 1$

Dans cette section, nous examinons la multiplicité des solutions au problème (4.1) pour le cas critique, c.-à-d. $p = 2_s^* - 1 = \frac{n+2s}{n-2s}$

Lemme 4.5 *Il existe $\lambda_* > 0$ tel que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$,$\forall\ \lambda \in (0, \lambda_*)$*

Preuve La preuve est analogue à la preuve du lemme 4.3. ■

Lemme 4.6 *J_λ est coècitive et borné inférieurement dans $\mathcal{N}_\lambda, \forall \lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Preuve La preuve est analogue à la preuve du lemme 4.4. ■

D'après les lemmes 4.5 et 4.6, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, nous savons que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ et J_λ est coercitive et borné inférieurement dans un N_λ^+ et N_λ^-. Par conséquent, nous pouvons définir :

$$\begin{array}{ll} \tilde{\beta}_\lambda^+ & = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u) \\ \tilde{\beta}_\lambda^- & = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) \end{array}.$$

Nous avons les résultats suivants.

Proposition 4.3 *Soit $\{u_k\} \subset X_0$ une suite de $(PS)_c$ pour J_λ avec :*

$$c \ < \frac{s}{n} \gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M \lambda^{\frac{p}{p-r-1}}.$$

Alors il existe une sous-suite de $\{u_k\}$, qui converge fortement dans X_0, où S_p est défini dans (4.10) et M est une constante positive donnée par

$$M \ = \left(\frac{p-r-1}{p}\right) \left(\frac{n(r+1)}{sp_s^*}\right)^{\frac{r+1}{p-r-1}} \left(\frac{n(p-r-1)+sp_s^* p}{np}\right)^{\frac{p}{p-r-1}} S_p^{\frac{-(r+1)}{p-r-1}} |\Omega|^{\frac{(p_s^*-r-1)p}{(p-r-1)p_s^*}}. \tag{4.25}$$

Preuve D'après le lemme 4.6, nous voyons que $\{u_k\}$ est borné dans X_0 . alors $\{u_k\}$ admet une sous suite toujours notée par $\{u_k\}$. Il existe $u_\infty \in X_0$ tel que $u_k \to u_\infty$ faiblement dans X_0, c'est-à-dire :

$$\int_Q \frac{|u_k(x)-u_k(y)|^{p-2}(u_k(x)-u_k(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy$$

$$\underset{k\to\infty}{\to} \int_Q \frac{|u_\infty(x)-u_\infty(y)|^{p-2}(u_\infty(x)-u_\infty(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy, \forall \phi \in X_0,$$

De plus, par [9, lemme 9], nous avons que :

$$u_k \to u_\infty \text{ faiblement dans } L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n) \quad , u_k \to u_\infty \text{ dans } L^{r+1}(\mathbb{R}^n), u_k \to u_\infty \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

et par [4.Théorème IV-9], il existe $l \in L^{r+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$|u_k(x)| \ \leq l(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

pour tout $1 \leq r+1 < p_s^* - 1$. Par conséquent, par théorème 1.12, nous avons que :

$$C(u_k) \longrightarrow C(u_\infty),$$

Par lemme 1.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(u_k) &= A(u_k - u_\infty) + A(u_\infty) + o(1), \\ B(u_k) &= B(u_\infty) + \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_k), u_k \rangle_{X_0} &= A(u_k) - p_s^* B(u_k) - \lambda(r+1)C(u_k) \\ &= A(u_k - u_\infty) + A(u_\infty) - p_s^* B(u_\infty) \\ &+ \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))dx - \lambda(r+1)C(u_k) + o(1) \\ &= \langle J'_\lambda(u_\infty), u_\infty \rangle_{X_0} + A(u_k - u_\infty) - p_s^* \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))dx + o(1), \end{aligned}$$

Par $\langle J'_\lambda(u_\infty), u_\infty \rangle_{X_0} = 0$ et $\langle J'_\lambda(u_k), u_k \rangle_{X_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} A(u_k - u_\infty) &\longrightarrow b, \\ p_s^* \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx &\longrightarrow b. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si $b = 0$, la preuve est terminée. En supposant que $b > 0$, selon la définition de S_p dans (4.10),

$$\|u_k - u_\infty\|_{X_0}^p \geq S_p \left(\int_\Omega ((u_k - u_\infty)(x))_+^{p_s^*} dx \right)^{\frac{p}{p_s^*}},$$

De plus on a :

$$p_s^* \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx \leq \gamma_1 \|u_k - u_\infty\|_{p_s^*}^{p_s^*},$$

c'est-à-dire $b \geq \gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}}$. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\tfrac{1}{p}A(u_k) - B(u_k) - \lambda C(u_k)\right) \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\tfrac{1}{p}A(u_k - u_\infty) - \tfrac{1}{p}A(u_\infty) - B(u_\infty)\right. \\ &\left. - \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx - \lambda C(u_k)\right) + o(1) \\ &= J_\lambda(u_\infty) + b(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p_s^*}) \\ &\geq J_\lambda(u_\infty) + \tfrac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}}. \end{aligned}$$

En supposant que $c < \frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}}$,on a $J_\lambda(u_\infty) < 0$. En particulier, $u_\infty \neq 0$,donc :

$$0 \ < \tfrac{1}{p}A(u_\infty) < B(u_\infty) + \lambda C(u_\infty). \tag{4.27}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k\longrightarrow\infty} J_\lambda(u_k) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(J_\lambda(u_k) - \tfrac{1}{p}\left\langle J'_\lambda(u_k), u_k\right\rangle_{X_0}\right) \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left((\tfrac{p_s^*}{p} - 1)(B(u_\infty) + \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx) \right. \\ &\left. -\lambda(\tfrac{p-r-1}{p})C(u_k)\right) \\ &= \left((\tfrac{p_s^*}{p} - 1)(B(u_\infty) + \int_\Omega (F(x,u_k) - F(x,u_\infty))\,dx \right. \\ &\left. -\lambda(\tfrac{p-r-1}{p})C(u_\infty)\right) \\ &\geq \tfrac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} + \tfrac{sp_s^*}{n}B(u_\infty) - \lambda\left(\tfrac{p-r-1}{p}\right)C(u_\infty). \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} H(u_\infty) &= \lambda\left(\tfrac{p-r-1}{p}\right)C(u_\infty) - \tfrac{sp_s^*}{n}B(u_\infty) \\ &< \lambda\left(\tfrac{p-r-1}{p}\right)C(u_\infty) - \tfrac{sp_s^*}{n}(\tfrac{1}{p}A(u_\infty) - \lambda C(u_\infty)) \\ &< \lambda\Gamma_2(\tfrac{p-r-1}{p} + \tfrac{sp_s^*}{n})A^{\frac{r+1}{p}}(u_\infty) - \tfrac{sp_s^*}{pn}A(u_\infty), \end{aligned}$$

telle que : $\Gamma_2 = \gamma_2 s_p^{\frac{-r-1}{p}} |\Omega|^{\frac{p_s^*-r-1}{p_s^*}}$. Posons $\eta = A^{\frac{1}{p}}(u_\infty)$, alors on définit la fonction $h(\eta)$ comme suite :

$$h(\mu) \ = \lambda\Gamma_2(\tfrac{p-r-1}{p} + \tfrac{sp_s^*}{n})\mu^{r+1} - \tfrac{sp_s^*}{pn}\mu^p.$$

Nous notons que $h(\eta)$ atteint son maximum à

$$\eta_0 = \left(\frac{\lambda n(r+1)\Gamma_2(\frac{p-r-1}{p}+\frac{sp_s^*}{n})}{sp_s^*} \right)^{\frac{1}{p-r-1}}$$

et

$$h(\eta) \leq h(\eta_0) \quad = M\lambda^{\frac{p}{p-(1+r)}} \ .$$

Avec

$$M \quad = \left(\frac{p-r-1}{p}\right)\left(\frac{n(r+1)}{sp_s^*}\right)^{\frac{r+1}{p-r-1}}\left(\frac{n(p-r-1)+sp_s^*p}{np}\right)^{\frac{p}{p-r-1}} S_p^{\frac{-(r+1)}{p-r-1}} \left|\Omega\right|^{\frac{(p_s^*-r-1)p}{(p-r-1)p_s^*}} .$$

Donc,

$$c \ \geq \frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M\lambda^{\frac{p}{p-r-1}}.$$

Ensuite, nous obtenons une contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent, $b = 0$ et, nous concluons que $u_k \to u_\infty$ fortement en X_0. Ceci complète la preuve. ■

Proposition 4.4 *Il existe $\lambda_2 > 0$ et $u_0 \in X_0$ tel que*

$$\sup_{t>0} J_\lambda(tu_0) \ \leq \frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M\lambda^{\frac{p}{p-r-1}}, \forall \lambda \in (0, \lambda_2). \tag{4.28}$$

En particulier

$$\tilde{\beta}_\lambda^- \ < \frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M\lambda^{\frac{p}{p-r-1}}.$$

Où la constante M dépend de q, n, s et $|\Omega|$, donnée par (4.25)

Preuve Soit $\lambda_{**} > 0$ tel que $\frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M\lambda^{\frac{p}{p-r-1}} > 0, \forall \lambda \in (0, \lambda_{**})$. Par la condition (4.11), $\exists\ u_0 \in X_0 \backslash \{0\}$ telle que

$$J_\lambda(tu_0) \ \leq \sup_{t\geq 0} \mathcal{I}_{p,p_s^*}(tu_0) - \lambda t^{r+1} C(u_0) \ < \frac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - \lambda t^{r+1} C(u_0). \tag{4.29}$$

Soit

$$\lambda_{***} = \left(\frac{t^{r+1}C(u_0)}{M}\right)^{\frac{2_s^*-(1+r)}{(1+r)}} \ ,$$

avec M constante positive définit dans (4.25). Alors on définit

$$-t^{r+1}C(u_0) \ < -M\lambda^{\frac{p}{p-(1+r)}}, \forall \lambda \in (0, \lambda_{***}).$$

Ainsi, nous obtenons que (4.29) est vrai. Finalement, nous définissons $\lambda_2 = \min\{\lambda_*, \lambda_{**}, \lambda_{***}\}$; par l'analyse des cartes fibrant $\varphi_u(t) = J_\lambda(tu)$,on obtient

$$\tilde{\beta}_\lambda^- \quad < \tfrac{s}{n}\gamma_1^{\frac{-n}{sp_s^*}} S_p^{\frac{n}{ps}} - M\lambda^{\frac{p}{p-(1+r)}}.$$

Pour $\lambda \in (0, \lambda_2)$.

Preuve Dans les propositions 4.1 et 4.2, il existe deux suites $\{u_k^+\}$ et $\{u_k^-\}$ dans X_0 telle que

$$J_\lambda(u_k^+) \longrightarrow \tilde{\beta}_\lambda^+ \text{ et} \quad J'_\lambda(u_k^+) \longrightarrow 0,$$

$$J_\lambda(u_k^-) \longrightarrow \tilde{\beta}_\lambda^- \text{ et} \quad J'_\lambda(u_k^-) \longrightarrow 0.$$

quand $k \longrightarrow \infty$.Nous observons que, à partir de l'analyse des cartes de fibrage $\varphi_u(t)$, nous avons $\tilde{\beta}_\lambda^+ < 0$. Similaire à la preuve de proposition 4.3 et 4.4 et théorème 4.1, le problème (4.1) a deux solutions $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $u_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ dans X_0. Depuis $\mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^- \neq \emptyset$, alors ces deux solutions sont distinctes. Ceci termine la preuve. ■ ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons utilisé la variété de Nehari et les carte de fibrage pour étudier la multiplicité des solutions faibles de quelques problèmes elliptiques fractionnaires avec condition de Dirichlet homogène et la non-linéarité est une fonction concave-convexe ou bien des fonctions homogènes. Par conséquent, il est facile de faire des extensions sur des systèmes fractionnaires, ainsi que l'étudie du cas super-critique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrosetti, , H. Brezis, , G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J.Funct. Anal. 122, 519–543 (1994).

[2] B. Barrios , E. Colorado , R. Servadei , F. Soria, A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities (2013). http ://arxiv.org/abs/1306.3190.

[3] C. Brandle, , E. Colorado, , A. de. Pablo, A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian. Proc. R.Soc. Edinb. Sect. A Math. 143(01), 39–71 (2013).

[4] H. Brezis, Analyse fonctionelle. Théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[5] K. J. Brown, T.F. Wu, A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem. Electron. J. Differ. Equ. 69, 1–9 (2007).

[6] K. J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. J. Differ. Equ. 193, 481–499 (2003).

[7] L. Caffarelli, L. Silvestre, An extension problem related to the fractional Laplacian. Commun. Partial Differ.Equ. 32(8), 1245–1260 (2007).

[8] A. Cotsiolis, , N. Tavoularis, Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives. J. Math.Anal. Appl. 295, 225–236 (2004).

[9] E. Di Nezza, , G. Palatucci, E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. Math. 136, 521–573 (2012).

[10] P. Drbek, , S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian : application of the fibering method. Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 127, 703–726 (1997).

[11] A. Fiscella, Saddle point solutions for non-local elliptic operators (2012). http ://arxiv.org/abs/1210.8401.

[12] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, Paris, New York, 1993.

[13] R. Servadei, , E. Valdinoci, Fractional Laplacian equations with critical Sobolev exponent (2012). http ://www.math.utexas.edu/mp arc-bin/mpa ?yn=12-58.

[14] R. Servadei, E. Valdinoci, Lewy-Stampacchia type estimates for variational inequalities driven by (non)local operators. Rev. Mat. Iberoam. 29(3), 1091–1126 (2013).

[15] R. Servadei, E. Valdinoci, Mountain pass solutions for non-local elliptic operators. J. Math. Anal. Appl. 389, 887–898 (2012).

[16] R. Servadei, , E. Valdinoci, The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian. Trans. Am. Math. Soc. 367, 67–102(2015).

[17] R. Servadei, , E. Valdinoci, Variational methods for non-local operators of elliptic type. Discret. Contin. Dyn.Syst. 5, 2105–2137 (2013).

[18] R. Servadei, , E. Valdinoci, Weak and viscosity solutions of the fractional Laplace equation. Publicacions Matemtiques 58(1), 133–154 (2014).

[19] R. Servadei, The Yamabe equation in a non-local setting. Adv. Nonlinear Anal. 2(3), 235–270 (2013).

[20] Y. Wei, X. Su, Multiplicity of solutions for non-local elliptic equations driven by the fractional Laplacian. Calc. Var.Partial Differ. Equ. doi :10.1007/s00526-013-0706-5.

[21] M. Willem, Minimax Theorems. Birkhauser, Boston (1996).

[22] T.F. Wu, Multiplicity results for a semi-linear elliptic equation involving sign-changing weight function. Rocky Mt. J. Math. 39(3), 995–1011 (2009).

[23] T.F. Wu, On semilinear elliptic equations involving concave–convex nonlinearities and sign-changing weight function. J. Math. Anal. Appl. 318, 253–270 (2006).

[24] X.H. Yu, The Nehari manifold for elliptic equation involving the square root of the Laplacian. J. Differ. Equ. 252(2), 1283–1308 (2012).

[25] J.G. Zhang, X.C. Liu, The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with the nonlinear boundary condition. J. Math. Anal. Appl. 400(1), 100–119 (2013).